В. ВАХАБОВ, Ш.ЛАКАЕВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ВАХОБОВ ВАЛИЖОН
ЛАКАЕВ ШУХРАТ САИДАХМАДОВИЧ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие предназначено для студентов бакалавриатуры 5311000 - Автоматизация и управление технологическими процессами и производством (в водном хозяйстве), 5230900 - Учет и аудит (водные ресурсы), 5311500 - Геодезия и геоинформатика, 5450400-Использование гидротехнических сооружений и насосных станций, 5430100-Механизация сельского хозяйства, 5430500 - Электроснабжение в сельском и водном хозяйстве, 5450200 - Водные ресурсы и мелиорация

Ташкент
«Tafakkur avlodi»
2020

УДК: 51(075.8)
ББК: 22.1я73
В 22

В 22 **Вахобов, В.**
Курс высшей математики [Текст]: учебное пособие / В.Вахобов, Ш.Лакаев. – Ташкент: «Tafakkur avlodi», 2020. – 232 с.

Учебное пособия предназначена для студентов обучающихся по направлениям образования бакалавриатуры 5311000 - Автоматизация и управление технологическими процессами и производством (в водном хозяйстве), 5230900 - Учет и аудит (водные ресурсы), 5311500 - Геодезия и геоинформатика, 5450400-Использование гидротехнических сооружений и насосных станций, 5430100-Механизация сельского хозяйства, 5430500 - Электроснабжение в сельском и водном хозяйстве, 5450200 - Водные ресурсы и мелиорация. В пособие приведены необходимые теоретические сведения, формулы и помещены примеры для практических занятий по курсе математический анализ и дифференциальная уравнения.

Рецензенты:

А. Рахматуллаев – ТИИМСХ, кандидат физико математических наук, доцент.

Т. Эргашев – Институт математика имени В.И. Романовского при академии наук Республики Узбекистан, кандидат физико математических наук, доцент.

УДК: 51(075.8)
ББК: 22.1я73

ISBN 978-9943-6690-9-3

Предисловие

Математическая наука, у истоков развития которой стояли наши великие предки Мухаммад аль-Хорезми, Ахмад Фергани, Абу Райхан Беруни, Мирзо Улугбек, в наши дни приобретает еще большее значение в связи с ускоренным развитием современных отраслей и технике.

Особенно взросла ее роль в сфере информационно-комуникационных технологий, техники, сельскомхозяйстве, экономике и многих других отраслей науки.

Главной целью высшего образования заключается формирование в сознании молодёже глубоких и устойчивых знаний а также воспитание верности идеям национальном независимости, любви к Родине и чувство патриотизма.

В процессе реализации основных целей “закона об образований” и “Национальной программы по подготовке кадров” большое внимание уделяется к точным наукам.

В связи с этим было бы целесообразно существование понятно и математически последовательно изложенных учебных пособий.

Настоящий “Курс высшей математики” является расширенным изложением лекций, которые авторами прочитаны студентам Ташкентского института ирригации инженеров и механизации сельского хозяйства. Он может использован в качестве учебного пособия для студентов естественных факультетов нематематического профиля, где различные разделы высшей математики объединены в один курс.

Авторам стремились изложить материал по возможности полно и доступно и ставили своих целью не просто сообщить читателю те или иные сведения по высшей математике, а развить у него математическое мышление, показать внутренную связь математических понятий, т.е. представить математику в ее развитии.

Книга содержит краткие сведения основы дифференциального и интегрального исчисления функций одной и многих переменных, понятия о теорию дифференциальных уравнений и рядах.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Б.А.Худоярову и доценту А.А.Файзиеву за просмотр рукописи и сделанные им замечания, а также опыт и знания которого помогли в создании книги.

ГЛАВА I
ФУНКЦИЯ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Введение

При изучении закономерностей, встречающихся в природе, все время приходится иметь дело с величинами постоянными и величинами переменными.

Определение. Постоянной величиной называется величина принимающую одно и то же значение.

Переменной величиной называется величина которое может принимать различные числовые значения.

Приведем примеры постоянных и переменных величин.

Пример 1. Диаметр и длина окружности,в зависимости от обстоятельств, могут принимать различные значения и следовательно, вообще говоря, являются величина переменными. Однако отношение длины окружности к ее диаметру сохранят всегда одно и то же значение и, следовательно, есть величина постоянная, называемая числом $\pi \approx 3{,}14159$

Пример 2. Объем V и давление P определенной массы газа являются величинами переменными; однако $V \cdot P$ есть величина постоянная.

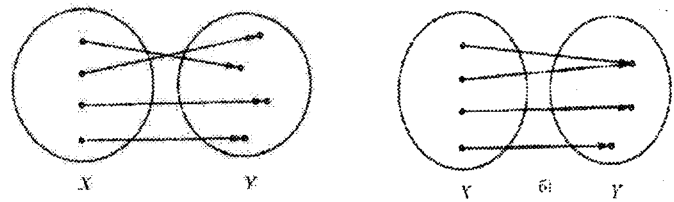
1.1.1. Понятие функции

На практике изучая какое-нибудь явление, мы имеем дело с совокупностью переменных величин, которое связаны между собой так, что значения одних величин (независимые) полностью определяют значения других(зависимые переменные или функции).

Теперь дадим определение понятия функции, являющегося центральным понятием высшей математики.

Пока мы ограничимся случаем двух переменных величин.

Пусть даны два непустых множества X и Y.



Определение 1. Соответствие или правило, которое каждому элементу x из X сопоставляет один и только один элемент y из Y называется функцией, определенной на множестве X со значениями в Y.

Тот факт, что у есть функция от х сокращено обозначают так:

$$y = f(x) \tag{1}$$

где x аргумент, независимая переменная, y функция, зависимая переменная, символ f можно употреблят любую другую букву например, g, h, φ, F и т.д.

Частное значение функци $f(x)$ при $x=a$ записываются так: $f(a)$.

Например, если $f(x)=x(1-x)$ то $f(0)=0, f(1)=0, f(2)=-2$ и т.п.

Приведем пример поясняющее понятие функции.

Пример 4. Из формулы площади круга $S=\pi R^2$ следует, что каждому допустимому (положительному) значению радиуса R соответствует определенное значение площади S есть функция от R где $S>0$ и $R>0$

Определение 3. Множества всех y из Y для которых существует хоть x из X такое, что $y=f(x)$, называется множеством значений функции f и обозначается $E(f)$.

Определение 4. Функция $f(x)$ называется числовой функций, если ее $D(f)$ и $E(f)$ содержится в множестве действительных чисел R.

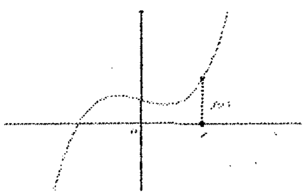
Отметим, что область определения функции могут быт: интервал (a,b), сегмент или отрезок $[a,b]$, полуинтервал $[a,b)$ или $(a,b]$, бесконечные интервалы $[-\infty,a)$, (b,∞), $(-\infty,\infty)$ и т.д.

Определение 5. Множество всех точек (x, y) плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяет уравнение $y = f(x)$ называется графиком функции $y = f(x)$.

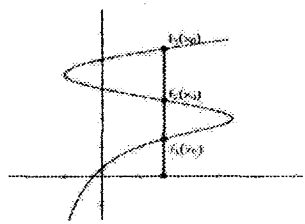
Если каждому значению переменной x соответствует одно значение переменной y, то $y = f(x)$ называется однознач-ной функцией от x; а если же хотя бы некотором значением переменной x соответствует несколько и бесконечное значений переменной y, то $y = f(x)$ называется многозначной функцией от то x.

Например $y = x^2$, $y = \sin x$ однозначные а $y = \pm\sqrt{x}$ – двузначная, $y = arcsinx$ – многозначная функция от x.

В дальнейшем основном мы имеем дело с однозначнами функциями.



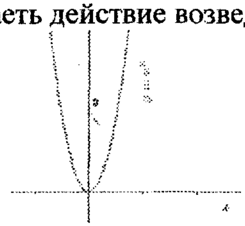
однозначная



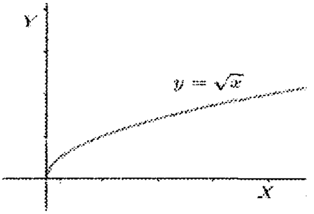
многозначная

Рассмотрим примеры для функции.

Пример 1. $y = x^2$ – функция $D(f) = R, E(f) = R_+$, f – соответствие или правило играеть действие возведение в квадрат.



Пример 2. $y = f(x) = \sqrt{x}$ – функция. $D(f) = E(f) = [0, +\infty)$, f – правило является действие извлечение квадратного корня.



1.1.2. Способы задания функции

Функции могут быт заданы различными способами.

3. Аналитический способ

В этом случае функция задается, при помощи некоторой формулы.

$$У=f(x)=2x+1,$$

$$y = h(x) = \log_2(x-3),\ y = \varphi(x) = \sin 3x$$

4. Графический способ

Здесь соответствие между x и y устанавливается с помощью заданного графика по которому для каждого значения аргумента x определяется значение функции y.

Часто графики функции вычерчиваются автоматически самопишущими приборами. Например, в метереологии барограф вычерчивает барограмму-график изменения атмосферного давления, в медицине электрокардиограф вычерчивает электрокардиограмму-график работы сердца и т.д.

5. Табличный способ

В этом случае функция задается таблицией. Нам известно таблицы значений функций $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \lg x$, $y = \sin x$ и так далее.

Определение 6. Если функция задана аналитически уравнением $y = f(x)$ (1) разрешенным относительно y, то такое задание функции называется явным.

Например, $y = 2x^2 - 1$, $y = \sin 3x$, $y = 4^x$

Определение 7. Если функция задана уравнением

$$F(x, y) = 0 \qquad (2)$$

не разрешенным относительно y то такое задание функции называется неявным.

Например, $2x-3y-6=0$, $x^2-e^{xy}+3=0$

Заметим, что не всякое уравнение вида (2) задает функцию. Так, уравнение $x^2+y^2+4=0$ не определяет функцию.

Определение 8. Функция, заданная в виде $y=f(g(x))$ называется сложной функцией, составленной из функцией f и g.

Например, $f(x)=\cos x^2$, $g(x)=1+\sqrt{x}$ $y=f(g(x))=\cos(1-\sqrt{x})^2$

Сложную функцию часто записывают в виде $y=f(u)$, где $u=g(x)$

Например, $y=\lg(\arcsin x)$

1.1.3. Основные характеристики функции

Пусть функция $y=f(x)$, определена на множестве X и $x\in X, -x\in X$.

Определение 9. Если $f(-x)=f(x)$ то функция $y=f(x)$ является четной, а $f(-x)=-f(x)$, то она нечетной.

Например, функция $f(x)=x^2, x\in R$ является четной, так как

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x);$$

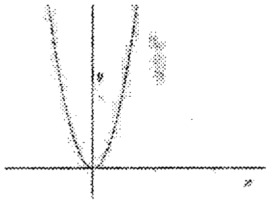
а функция $y=f(x)=x^3, x\in R$ является нечетной, так как

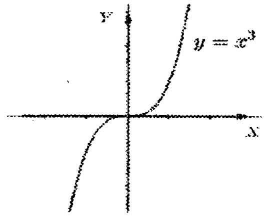
$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x).$$

Определение 10. Функция, которые не является ни четными, ни нечетными, называются функциями общего вида.

Например, $f(x)=3x+2$, $g(x)=2^x$ – функции общего вида.

Замечание. График четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной функции симметричен относительно начало координат.





Определение 11. Функция $y = f(x)$, $x \in (a,b)$, называется возрастающей на интервале (a,b), если при любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

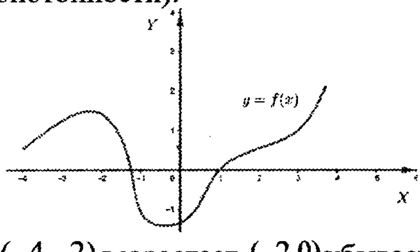
Определение 12. Функция $y = f(x)$, $x \in (a,b)$, называется убывающей на интервале (a,b), если при любых $x_1 \in (a,b)$ и $x_2 \in (a,b)$ принадлежащих этому интервалу

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Определени 13. Функция $y = f(x)$, $x \in (a,b)$, называется неубывающей (невозрастающей)на интервале (a,b), если для любых $x_1 \in (a,b)$ и $x_2 \in (a,b)$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2) \; (f(x_1) \ge f(x_2))$$

Определение 14. Интервалы, в которых функция либо только возрастает (не убывает), либо только убывает (не возрастает), называются интервалами строгой монотонности (интервалами монотонности).



$y = f(x)$ на $(-4,-2)$ возрастает, $(-2,0)$ убывает на $(0,3)$ она неубывает, на $(-4,-2)$, $(-2,0)$ строго монотонна.

1.1.4. Основные элементарные функции.

Основными элементарными функциями называются следующие функции:

a) Постоянная функция $f(x)=c,\ c\in R$;

b) Степенная функция $f(x)=x^{\alpha}$, где $\alpha-$ любое действительное число;

c) Показательная функция $f(x)=a^{x}, a>0,\ a\neq 1$;

d) Логарифмическая функция $y=\log_a x$, где $a>0,\ a\neq 1$;

e) Тригонометрические функции $y=\sin x,\quad y=\cos x,$ $y=tgx,\ \ y=ctgx$

f) Обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x,\ \arccos x,\ arctgx,\ arcctgx$.

Глава II. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛЫ. ТЕОРИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 1. Функция определенного на множестве натуральных чисел, т.е. $f(n), n \in N$ называется числовая последовательность.

Приведем примеры:

Пример 1. Последовательность всех четных чисел т.е. 2, 4, 6, 8,...

Пример 2. Последовательность чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

Пример 3. Последовательности целых десятков 10, 20, 30,..., 90

Обший член последовательности обозначается через $x_n, y_n, a_n, b_n,$ и так далее. Таким образом согласно определению числовая последовательности имеем $x_n = f(n),\ n \in N$.

Для выше приведенных примеров общий члены будут

$$x_n = 2n,\ n \in N;\ y_n = \frac{1}{n}, n \in N;\ z_n = 10n,\ n = 1,2,\ldots,9.$$

2.1.1. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Определение 2. Величина x_n, которое с ростом n $(n \to \infty)$ стремится к нулю, то такие величины называется бесконечно малые и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Определение 3. Величина x_n, которое с увеличением n $(n \to \infty)$ стремится к бесконечности, то такие величины называется бесконечно большими т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Например: 1) Величина $\alpha_n = \frac{1}{n}, n \in N$ есть бесконечно малые.

2) Величина $\beta_n = 2n,\ n \in N$ является бесконечно большим.

Арифметическая и геометрическая прогрессия служат примерами числовой последовательности.

Теоремы о пределах последовательности

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c -$ постоянная.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

2.1.2. Предел числовой последовательности

Пусть $\{x_n\}$ – последовательность, a – постоянная, α_n – бесконечно малые $\varepsilon > 0$.

Определение 2. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел равным числу a и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Определение 3. Если $\{x_n\}$ можно представит в виде

$$x_n = a + \alpha_n$$

то число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$, т.е $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Пример 1. Найти предел $x_n = \dfrac{2n+1}{3n}$

Решение. $x_n = \dfrac{2n+1}{3n} = \dfrac{2n}{3n} + \dfrac{1}{3n} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3n}$

Согласно определению 3 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{2}{3}$.

2.1.3. Предел последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718 \qquad (2)$$

При вычисление предел последовательностей воспользуемся следующих формул:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A}{n^k}=\begin{cases}0, \text{ если } k>0\\ \infty, \text{ если } k<0\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}A\cdot n^k=\begin{cases}\infty, \text{ если } k>0\\ 0, \text{ если } k<0\end{cases}$$

где A – постоянная.

Пример 2. Найти предел $x_n=\left(\dfrac{n^2+1}{2n^2+5}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\frac{1}{n^2})}{n^2(2+\frac{5}{n^2})}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{5}{n^2})}=\frac{1}{2}.$$

2.1.4. Второй замечательний предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$

Теорема 1. Переменная величина $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$ имеет предел, заключенный между 2 и 3.

Доказательство. По формуле Бинома Ньютона можем написать

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(n-1)]}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n \qquad (1)$$

После алгебраические переобразования, получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad (2)$$

Покажем, что переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ограничена.

Замечая, что $\left(1-\frac{1}{n}\right)<1$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1$, и так далее, из (2) получим неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n},$$

Замечая, далее, что

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3},\ldots,\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}<\frac{1}{2^{n-1}},$$

Можем написать неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}$$

Подчеркнутые члены правой части этого неравенства образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{2}$ и первым членам $a=1$,

Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right]=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<3.$$

Следовательно, для всех n получаем $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$.

Из равенства (2) следует, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 2$.

Таким образом, получаем неравенства

$$2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3. \qquad (3)$$

Итак переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастающая и ограниченная, то она имеет предел.

Этот предел обозначается числом e. $2 \le e < 3$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad e \approx 2{,}7182818284...$$

Можно доказать, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \; x \in (-\infty,1) \cup (0,\infty)$$

Если положим $\frac{1}{x} = \alpha \; (\alpha > -1) \Rightarrow x = \frac{1}{\alpha}$ то будем иметь, при $x \to \infty, \alpha \to 0$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Примеры:

Пример 1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^5 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 = e \cdot 1 = e$$

Пример 2. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^3 = e^3$

Пример 3. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \Rightarrow \begin{bmatrix} x = 2y, x \to \infty \\ y \to \infty \end{bmatrix} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y} = e^2$

Пример 4.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x-1+4} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+4} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^y \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^4 = e^4 \cdot 1 = e^4.$$

Тема. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

2.2.1. Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки, в самой точке $x = a$ функция может быт и не определена.

Определение 1. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию

$$|x - a| < \delta \tag{1}$$

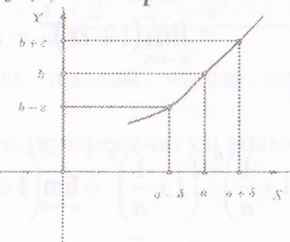
выполняется и неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon\,. \tag{2}$$

Если b есть предел функции $f(x)$ при $x \to a$, то пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \tag{3}$$

$$f(x) \to b \text{ при } x \to a\,. \tag{4}$$



Рассматриваются также односторонние пределы функции:
Предел слева

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b_1 \tag{2}$$

Предел справа

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b_2 \tag{3}$$

Отметим, что если односторонние пределы равны, т.е

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = b_1 = b_2 = b,$$

то предел b в точке $x = a$ существует.
Если односторонние пределы различны

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x), \text{ т.е } b_1 \neq b_2 \text{ рис.}(a)$$

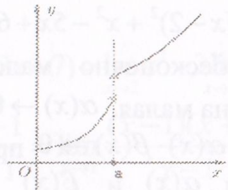


рис. a

или хотя бы один из них не существует, то несуществует и предел функции в точке $x = a.$

2.2.2 Бесконечно малые функции и их свойства

Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ или при $x \to \infty$, если

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \alpha(x) = 0 \qquad (1)$$

Например, функция $\alpha(x) = (x-3)^2$ бесконечно малая при $x \to 3$, так как

$$\lim_{x\to 3} \alpha(x) = \lim_{x\to 3}(x-3)^2 = 0,$$

функция $\alpha(x) = \dfrac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \to \infty$, поскольку

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Свойства бесконечно малых функции

1°. Если функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то

$$f(x) = b + \alpha(x) \Rightarrow y = b + \alpha \qquad (2)$$

где $\alpha = \alpha(x) -$ бесконечная малая при $x \to a.$

Обратное также верно:

Если верно (2), то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

2°. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ есть бесконечно малая при $x \to a.$ т.е если $u(x) = \alpha(x) - \beta(x) + \gamma(x)$, где $\alpha, \beta, \gamma -$ бесконечно малые, то $u(x) -$ также будет бесконечно малая.

$$u(x)=(x-2)^2+x^2-5x+6+(x-2).$$

3°. Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию, есть бесконечна малая. $\alpha(x)\to 0$ $|\beta(x)|<C$

$$u(x)=\alpha(x)\cdot\beta(x)\to 0 \text{ при } x\to a$$

Следствие 1. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малая то $\gamma(x)=\alpha(x)\cdot\beta(x)-$есть бесконечно малая.

Следствие 2. Если $u(x)=C\cdot\alpha(x)$ где $\alpha(x)$ бесконечно малая то $u(x)$ также будет бесконечно малая. $u(x)=2\cdot\frac{1}{x}\to 0$ при $x\to\infty$.

2.2.3. Бесконечно большие функции

Функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$ $(x\to\infty)$ если для любого $N>0$ можно найти такое число $\delta>0$, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, выполняется неравенство

$$|f(x)|>N,$$

или

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

2.2.4. Основные свойства пределов

Пусть функция $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x\to a$ т.е

$$\lim_{x\to a}f(x)=A,\ \lim_{x\to a}g(x)=B$$

имеют место следующие свойства:

1) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\pm B$

2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\cdot B$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$

4) $\lim\limits_{x\to a}C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)=C\cdot A$, где $C-$постоянная.

5) Если $f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)=\lim\limits_{x\to a}f_2(x)=C$, то

$$\lim_{x\to a} f(x)=C$$

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+7)=\lim\limits_{x\to 2}x^2-3\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}7=2^2-3\cdot 2+7=5$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=1+0=1$

2.2.5. Предел функции $\frac{\sin x}{x}$, при $x\to 0$

Для нахождения предела отношения $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$ нельзя применить теорему о пределе частного, так как $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0,\ \lim\limits_{x\to 0}x=0$.

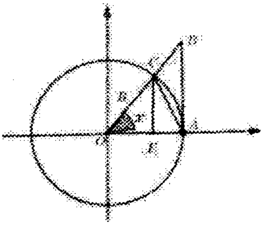
Также нельзя сделать никаких переобразований для вычисления предела данного отношения.

Однако имеет место следующий предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (1)$$

Этот предел можно доказать с помощью геометрического соображения.

Возьмем окружность радиуса R, и центральный угол x, выраженный в радианном мере. Проведем хорду AC и касательную AB пересекающую продолжение радиуса OC в точке B. из рисунка видно:



$$S_{\Delta AOC}<S_{секAOC}<S_{\Delta AOB};$$

$$\frac{1}{2}OA\cdot EC<\frac{OA\cdot \overset{\smile}{AC}}{2}<\frac{OA\cdot AB}{2}$$

$$EC<\overset{\smile}{AC}<AB.$$

Разделим все члены последних неравенств на R R:

$$\frac{EC}{R} < \frac{\overset{\cup}{AC}}{R} < \frac{AB}{R} \qquad (2)$$

Но из треугольника OEC имеем $\dfrac{EC}{R} = \sin x,$ из ΔOAB

имеем: $$\frac{AB}{R} = tgx,\ \frac{\overset{\cup}{AC}}{R} < x \quad l = \alpha R$$

тогда неравенства (2) имеет вид:

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

Так как x – острый угол, то $\sin x > 0;$

Разделив последнее неравенства на $\sin x$ получим:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (3)$$

В неравенстве (3) переходим пределу при $x \to 0,$ т.е

$$\lim_{x\to 0} \cos x < \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x\to 0} 1 \Rightarrow$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$. Тогда $1 < \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow$ согласно свойства 5

имеем $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Этот предел носят названия *первый замечателный* предел.

Упражнения:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin kx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{k \sin kx}{kx} = k \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ kx\to 0}} \dfrac{\sin kx}{kx} = k \cdot 1 = k$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\sin\dfrac{x}{2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{x}{2}=1\cdot 0=0$

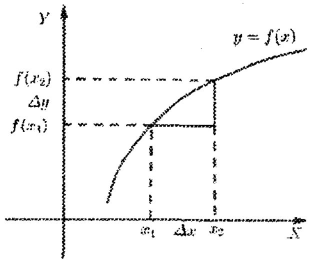
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{\sin nx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k}{n}\cdot\dfrac{\frac{\sin kx}{kx}}{\frac{\sin nx}{nx}}=\dfrac{k}{n}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin kx}{kx}}{\frac{\sin nx}{nx}}=\dfrac{k}{n}\cdot\dfrac{1}{1}=\dfrac{k}{n}$

Глава III. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ РАЗРЫВА I-ГО И II-ГО РОДА

3.1.1. Приращение аргумента и функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на X и $x_1 \in X$, $x_2 \in X$.

Разность между новым и первоначальным значениям аргумента x называется приращением аргумента и обозначается через Δx. Таким образом $\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 + \Delta x$.



Величина x_2 иначе называется наращенным значением аргумента (переменной).

Приращение аргумента можеть быть как положительным, так и отрицательным числом. Например если значение x если изменятся от 5 до 5,2, то

$$\Delta x = 5{,}2 - 5 = 0{,}2$$

а если оно изменяется от 10 до 9,7, то

$$\Delta x = 9{,}7 - 10 = -0{,}3\,.$$

Пусть дана функция $y = f(x) = x^2$. Предположим, что $x_1 = 3$ $x_2 = 3{,}5$, тогда $\Delta x = 3{,}5 - 3 = 0{,}5$.

Найдем значения функция $f(x) = x^2$ в этих точках:

$$y_1 = f(x_1) = 3^2 = 9,\ y_2 = f(x_2) = (3{,}5)^2 = 12{,}25$$

Разность $y_2 - y_1$ – называется приращением функции и обозначается через Δy.

Таким образом, $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = 12{,}25 - 9 = 3{,}25$

Найдем приращение Δy функции $y = x^2$ при любом изменении x.

Допустим, что x первоначальное значение и оно получает приращение Δx.

Тогда новое наращенное значение аргумента будет $x + \Delta x$.

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2,\ y = f(x) = x^2.$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

Мы нашли, приращение данной функции в общем виде.

Пример 1. Найти приращение функции $y = f(x) = 2x^2 + 3$.

Решение: $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x)^2 + 3$;

$$\Delta y = 2(x + \Delta x)^2 + 3 - 2x^2 - 3 = 4x \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2$$

Пример 2. Найти приращение функции $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}; \quad \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

3.1.2. Определение непрерывности функции

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 (следовательно, и в самой точке x_0), существует предел функции при $x \to x_0$ и он равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1}$$

Другими словами, функции $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Пример 1. Функция $f(x) = x^2$, $x \in R$ в точке $x = x_0 = 2$ непрерывна, так как

$$\lim_{x \to 2} x^2 = f(2) = 2^2 = 4.$$

Определение 2. Функция $f(x)$, $x \in R$ называется непрерывной в точке $x = x_0$ если:

1) Она определена при $x = x_0$ $(x_0 \in X)$;

2) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$ (2)

Определение 3.Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0) \tag{3}$$

Определение 4. Функция $f(x),\ x\in X$ непрерывна на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества X.

Пример 2. Функция $f(x)=\sin x, x\in R$ непрерывна в произвольной точке $x_0\in X$.

Решение. $y_0=f(x_0)=\sin x_0$,

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\sin(x_0+\Delta x)-\sin(x_0)=$$

$$=2\sin\left(\frac{x_0+\Delta x-x_0}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x_0+\Delta x+x_0}{2}\right)=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=0$$

3.1.3. Основные теоремы о непрерывных функциях.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то сумма $h(x)=f(x)+g(x)$ также есть непрерывная функция в точке x_0.

Доказательство. Так как $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны то $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$ на основании теоремы о пределах имеем:

$$\lim_{x\to x_0}h(x)=\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)+g(x_0)=h(x_0)$$

Опираясь на свойства пределов, так же можно доказать следующие теоремы:

Теорема 2. Произведение двух непрерывных функций есть функция непрерывная.

Теорема 3. Частное двух непрерывных функций есть непрерывная функция, если знаменатель в точке $x=x_0$ не обращается в нуль.

Теорема 4. Если $u = g(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 5. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Пример 3. Функция $y = f(x) = x^3$, $x \in R$, непрерывна в любой точке x_0, так как,

$$\lim_{x \to x_0} x^3 = x_0^{\ 3}, \ \lim_{x \to 3} x^3 = 3^3 = 27.$$

Пример 4. Функция $y = f(x) = e^x$, $x \in R$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in X$, так как $\lim\limits_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$.

3.1.4. Точка разрывы функции

Точки разрыва первого рода.

Пусть точка x_0 является предельной точкой области определения X функции $f(x)$.

Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, то x_0 – точка устранимого разрыва.а если $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 – точка неустранимого разрыва первого рода.

Разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке x_0.

Точки разрыва второго рода.

Если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ не существует или бесконечен, то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$ т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty.$$

Пример 1. Иследовать на разрывность функции $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, $x \neq 0$.

Решение. $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ Тогда $f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

Следовательно,

$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = f(0-0) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = f(0+0) = 1$

Поскольку $f(0+0) \neq f(0-0)$, то функция в точке $x = 0$ имеет разрыв первого рода. Скачок равен

$$f(0+0) - f(0-0) = 1 - (-1) = 2$$

Пример 2. Функция $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ имеет разрыв второго рода в точке $x = 0$. Действительно, при $x = 0$ функция неопределена:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Легко показать, что эта функция непрерывна при любом значении $x \neq 0$.

При помощью непрерывности функции вычисление некоторые важные пределы

3.2.1. Доказательство предела $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \lim_{x \to 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \left[\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \log_a e.$$

В частности, при $a = e$ из (1) имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \log_e e = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

3.2.2. Доказательство предела

Положим

$a^x - 1 = y \Rightarrow a^x = y + 1 \Rightarrow \log_a a^x = \log_a(y+1) \Rightarrow x = \log_a(1+y)$

В силу непрерывности функции $f(x)=a^x$ при $x\to 0,$ то $y\to 0$

Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+y)}{y}}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{\log_a e}\Rightarrow$$

так как, $\log_a e=\frac{\log_e e}{\log_e a}=\frac{1}{\ln a}$. Итак, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

3.2.3. Доказательство предела

Положим $1+x=e^y\Rightarrow x=e^y-1;$ при $y\to 0$ $x\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\alpha y}-1}{e^y-1}=\alpha\cdot\lim_{y\to 0}\left[\frac{e^{\alpha y}-1}{\alpha y}\cdot\frac{y}{e^y-1}\right]=\alpha\cdot\lim_{y\to 0}\left[\frac{\frac{e^{\alpha y}-1}{\alpha y}}{\frac{e^y-1}{y}}\right]=\alpha$$

Согласно пределу (2) при $a=e$ имеем $\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^{\alpha y}-1}{\alpha y}=1$ и $\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$

Приведем примеры:

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-5x+7)}{x-2}\left(\frac{0}{0}\right)$

Решение: положим $x-2=\alpha\Rightarrow x=\alpha+2,$ тогда

$x^2-5x+7=(\alpha+2)^2-5(\alpha+2)+7=\alpha^2+4\alpha+4-5\alpha-10+7=\alpha^2-\alpha+1$

при $x\to 2$ $\alpha\to 0$.

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{\ln(1+\alpha^2-\alpha)}{\alpha^2-\alpha}\cdot\frac{\alpha^2-\alpha}{\alpha}\right]=$$

Согласно пределу $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ имеем:

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{\ln(1+\alpha^2-\alpha)}{\alpha^2-\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to0}\frac{\alpha^2-\alpha}{\alpha}=1\cdot(-1)=-1.$$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9^x-3^x}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to0}3^x\cdot\frac{3^x-1}{x}=\lim_{x\to0}3^x\cdot\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}=3^0\cdot\ln3=\ln3.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[7]{1+\sin x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{7}}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{7}}-1}{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{7}\cdot1=\frac{1}{7}$$

Что должен знать студент

1.Понятие функции, графика функции, области определения и значений функции.

2. Понятие четности, нечетности и периодичности функции.
3. Понятие возрастающей и убывающей функции.
4. Понятие сложной и обратной функции.
5. Элементарные функции и их свойства.
6. Понятие предела функции в точке и в бесконечности.
7. Бесконечно большие и бесконечно малые функции и их свойства.
8. Первый и второй замечательные пределы.
9. Правила раскрытия неопределенностей.
10. Понятие непрерывности функции, классификация точек разрыва.

Упражнения:

В задачах 1-8 даны функции и два значения аргумента x_1 и x_2. Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной при данных значениях аргумента; 2) найти односторонние пределы в точках разрыва; 3) построить график данной функции.

1. $y=\dfrac{3x}{x-1}$; $\quad x_1=1$; $\quad x_2=4$.

2. $y=\dfrac{4x}{x-2}$; $\quad x_1=2$; $\quad x_2=6$.

3. $y=\dfrac{4x}{x+2}$; $x_1=-2$; $x_2=2$.

4. $y=9^{\frac{1}{2-x}}$; $x_1=2$; $x_2=0$.

5. $y=4^{\frac{1}{3-x}}$; $x_1=3$; $x_2=1$.

6. $y=\dfrac{2x}{x+3}$; $x_1=-3$; $x_2=0$.

7. $y=\dfrac{4x}{x+5}$; $x_1=-5$; $x_2=5$.

8. $y=\dfrac{2x}{x-3}$; $x_1=-3$; $x_2=3$.

Контрольный тест

1. Областью определения функции $\dfrac{x^3}{x^2-3}$ является промежуток:

а) $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$; б) $(-3;3)$; в) $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\infty\right)$; г) $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\infty\right)$.

2. Предел функции $\lim\limits_{x\to3}(4x-7)$ равен:

а) 0; б) 10; в) 5; г) другой ответ.

3. Предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+5}{5x}$ равен:

а) $\dfrac{1}{5}$; б) 1; в) $\dfrac{4}{5}$; г) 0.

4. Предел функции $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$ равен:

а) $\dfrac{1}{5}$; б) 40; в) $\dfrac{4}{5}$; г) -40.

5. Предел функции $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-8x+12}{x^2-7x+6}$ равен:

а) $-\dfrac{1}{5}$; б) $\dfrac{4}{5}$; в) 2; г) -1.

6. Предел функции $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx}{x}$ равен:

а) $-\frac{1}{5}$;   б) 1;   в) 0;   г) -1.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt[4]{x^2-4}$.
Ответ: $D(f)=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

2. Вычислите $\lim\limits_{x\to-1}(4x+3)$.

Ответ: -1.

3.Вычислите $\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{x^2+5}{x^2-1}$.

Ответ: $-\infty$.

4. Вычислите предел функции $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}$.

Ответ: $\dfrac{9}{5}$.

5. Вычислите предел функции $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{5-x}-2}$.

Ответ: 2.

6. Вычислите предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}$.

Ответ: 2.

Глава IV: ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

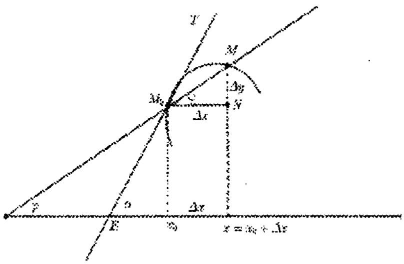
Введение

Производная – одна из важнейших понятий современной математики. С помощью производной можно характеризовать скорость изменения функции, скорость протекания некоторого процесса, явления. С введением производной появилась возможность решать задачи, не доступные методам элементарной математики.

4.1.1. Задачи, приводящие к понятию производной

К понятию производной приводят многие задачи геометрии, физики, химии и других наук. Рассмотрим некоторые из них.

Задачи о касательной



Введем декартову прямоугольную систему координат Oxy, рассмотрим график функции $y = f(x)$.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – фиксировонная точка этого графика и $M(x, y)$ – любая другая его точка, где $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$.

Из треугольника M_0MN находим

$$tg\varphi = \frac{MN}{M_0N} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1)$$

где φ – угол, образуемый секущей M_0M с осью Ox.

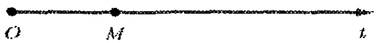
Пусть $M \to M_0$ вдоль графика $y = f(x)$, M_0T – касательная к нему в точке M_0, α – угол наклона касательной к оси Ox, тогда если $\Delta x \to 0$, то

$$tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (2)$$

4.1.2. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача о скорости неравномерного прямолинейного движения

Пусть материальная точка N движется неравномерно прямолинейна по закону $y = f(t)$



OM – длина пути, $f(t)$ – заданная функция времени t.

Пусть при $t = t_0$ движущаяся точка совпадала с точкой $M_0(y_0)$, $y_0 = f(t_0)$, в момент времени t находилась в точке M.

Приращение пути Δy за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ будет равна

$$\Delta y = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0).$$

Средний скоростью V_{cp} движения за промежуток времени Δt называется частное

$$V_{cp} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad (4)$$

Скоростью движения в момент t_0 называется предел отношения (4), когда $\Delta t \to 0$, т.е

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad (5)$$

Эти задачи сведет к понятию производной. В обоих задачах мы вычисляли предел отношение приращению функцию к приращению аргумента, когда последнее стремился к нулю.

В первом задаче этот предел давал угловой коэффициент касательной проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, а втором задачи этот предел означая скорость движения материальной точки в момент времени $t = t_0$.

4.1.3. Определение производной, ее геометрический и физический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором конечном или бесконечном интервале $X = (a, b)$ и непрерывна на этом интервале.

Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$, такое что $x + \Delta x \in X$, тогда функция $y = f(x)$ получит соответствующее приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{1}$$

Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это отношение дает среднюю скорость изменения функции $y = f(x)$ относительно аргумента x на промежутке $[x, x + \Delta x]$.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке $x \in X$ называется предел отношения приращения этой функции к приращению аргумента, когда $\Delta x \to 0$ и ее обозначают через $y' = f'(x)$.

Таким образом

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2}$$

Отметим, что производная функции $y = f(x)$ есть некоторая функция $f'(x)$, произведенная из данной функции.

Функция, имеющая производную на множестве X, называется дифференцируемой на этом множестве.

Наряду с обозначением $f'(x)$ для производной употребляются и другие обозначения, например $y', y'_x, \frac{dy}{dx}$. Конкретное значение производной при $x = a$ обозначается $f'(a)$.

Операция нахождения производной от функции $f(x)$ называется дифференцированием этой функции.

Геометрический смысл производной

Производная $y' = f'(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x \in X$, т.е

$$k = tg\alpha = y' = f'(x) \tag{3}$$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \tag{4}$$

Нормалью к кривой в некоторой ее точке называется перпендикуляр к касательной в той же точке.

Если $f'(x_0) \neq 0,$ то уравнение нормали к функцию $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \tag{5}$$

Физический смысл производной

Пусть материальная точка движутся по закону $s = s(t)$.

Тогда

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = v_{cp}$$

означает средний скорость, а $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = V$ – мгновенную скорость.

Таким образом, производная $y' = f'(x)$ есть скорость изменения функции $y = f(x)$ в данной момент x.

Производная даст возможность изучить характер изменения функции.

Если $k = f'(x) > 0,$ то график функции $y = f(x)$ кругге поднымается, а если $k = f'(x) < 0,$ то она опускается.

4.1.4. Производные основные элементарные функции

1. $y = f(x) = x^{\alpha}$, где α – действительное число. $D(f)$ зависит от α.

$$y' = f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \tag{1}$$

Доказательство.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = \frac{x^{\alpha}\cdot\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{x\cdot\dfrac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha-1}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{\alpha-1}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}}$$

Согласно пределу $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha$, имеем $y' = f'(x) = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$

Отметим частные случаи этой ыормулы:

Если $\alpha = 1,\ y = x\ y' = 1$

Если $\alpha = \dfrac{1}{2}\quad y = \sqrt{x}\ y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Если $\alpha = -1,\ y = \dfrac{1}{x}\ y' = -\dfrac{1}{x^2}$

2. Производная логарифмической функции.

$$y = f(x) = \log_a x,\ a > 1, a \neq 1, x > 0$$

$$y' = f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a} \tag{2}$$

Доказательство.

$$\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

Нам известно, что $\lim\limits_{x\to 0}=\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$

Тогда $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}\log_a e$

Поскольку $\log_a e=\frac{\ln e}{\ln a}$, итак $y'=(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$

Если $a=e$, то $y=\log_e a=\ln x$ $y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$

Производная $y=f(x)=\sin x,\ x\in R$,

$$y'=f'(x)=(\sin x)'=\cos x \qquad (3)$$

Доказательство.

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x.$$

Согласно формула $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$\Delta y=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=f'(x)=1\cdot\cos x=\cos x.\ (\sin x)'=\cos x.$$

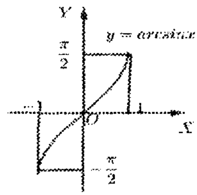
4.1.5. Основные правила дифференцирования

1. $y = u \pm v \; y' = u' \pm v'$
2. $y = u \cdot v \; y' = u' \cdot v'$
3. $y = Cu \;\; y' = Cu'$
4. $y = \dfrac{u}{v} \; y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$

Производная обратной функции

Если $y = f(x)$ и $x = g(y)$ − взаимно обратные дифференцируемые функции и

$y'_x \neq 0,\; x'_y \neq 0,$ то $x'_y = \dfrac{1}{y'_x} \Rightarrow y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$.



Производная $y = \arcsin x,$ где $-1 \leq x \leq 1$ и $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Обратная функция имеет вид $x = \sin y$, причем $x'_y = \cos y \neq 0, -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$.

$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Тогда $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Итак $y' = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Аналогично можно показать, что производная $y = \arccos x$ будет равна $y' = (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Производная $y = (arctgx)$ где $-\infty \leq x \leq \infty,$ и $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$.

Обратная функция имеет вид $x = tgy$. Тогда,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Таким образом, $y' = (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$. Можно показать, что $y' = (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Таблица производных

	Простая функция	Сложная функция
1.	$(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbf{R}$	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$, $n \in \mathbf{R}$
2.	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
3.	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
4.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
5.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
6	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
7.	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
8.	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
9.	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
10.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12.	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
13.	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Производная от сложной функции. Дифференциал функции.

4.2.1. Производная от сложной функции

Рассмотрим функции $y = f(u), u = g(x)$. Тогда функция $y = f[g(x)]$ называется функцией от функции, или сложной функцией; в этом случае u называют промежуточным аргументом, x – независимой переменной. Например,

$y = f(x) = \sin x$, простая функция а, $y = \sin\sqrt{x+1}$ сложная функция, т.е $y = f(u)$, $u = \sqrt{x+1}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если $y = f(u)$, $u = g(x)$ – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции $y = f(g(x))$ существует и равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу по независимой переменной x, т.е

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x \qquad (1)$$

Доказательство. По определению производной $y'_u = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$, $\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta u \to 0$, откуда $\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$ и $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}$.

Следовательно

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x + 0 \cdot u'_x = y'_u \cdot u'_x$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Найти производную функции $y = \sin(3x+5)$.

Решение. Данную функцию можно представить так: $y = \sin u$, $u = 3x+5$.

Поскольку $y'_u = \cos u$, $u'_x = 3$, то формуле (1) имеем

$$y'_x = [\sin(3x+5)] = \cos(3x+5) \cdot 3 = 3\cos(3x+5).$$

Пример 2. $y = (3-2x)^5$ $y'_x = ?$

Решение. Так как $y = u^5$, $u = 3-2x$, $y'_u = 5u^4$,

$u'_x = (3-2x)' = -2$, то $y'_x = [(3-2x)^5] = 5u^4(-2) = -10(3-2x)^4$.

Пример 3. $y = \ln\sqrt{x^2-1}$ $y'_x = ?$

Решение. $y = \ln u$, $u = \sqrt{x^2-1}$; $y'_u = \frac{1}{u}$,

$$u_x' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}(x^2-1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Итак, $y_x' = \left(\ln\sqrt{x^2-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{x^2-1}.$

4.2.2. Дифференциал функции

С понятием производной тесно связано понятие дифференциала одного из важнейших понятий высшей математики.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Тогда производная этой функции в некоторой точке $x\in[a,b]$ определяется равенством

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x). \tag{1}$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ отличается от $f'(x)$ на величину бесконечно малую:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)+\alpha, \tag{2}$$

где $\alpha=\alpha(x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Из (2) имеем

$$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x \tag{3}$$

Таким образом, приращение Δy состоит из двух слагаемых, из которых первая слагаемое называется главная часть приращния, линейная относитеьно Δx.

Произведение $f'(x)\cdot\Delta x$ называют дифференциалом функции $y=f(x)$ и обозначают через dy или $df(x)$:

$$dy = f'(x)\cdot\Delta x \tag{4}$$

Если $y=x$, то $y'=f'(x)=1$, и следовательно $dy=dx=\Delta x$

$$dy = f'(x)dx \tag{5}$$

4.2.3. Основные свойство дифференциала.

1° $d(u+v)=du+dv$

2° $d(uv)=udv+vdu$

3° $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$

4° $d(Cu)=Cdu$

Пример 4. $y=x^2\cdot\sin x$ $dy=?$

$dy=x^2d\sin x+\sin xdx^2=x^2\cdot\cos xdx+\sin x\cdot 2xdx=(x^2\cos x+2x\sin x)dx$

Дифференциал сложной функции $y=f(u),\ u=g(x)$, то

$$dy=f_u'\cdot u_x'dx \qquad (5)$$

Пример 5. $y=tg^2x$ $dy=?$

$$y=u^2,\ u=tgx\ .$$

$$dy=y_u'\cdot u_x'dx=2u\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=2tgx\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=2ud(u)$$

Пример 6. $y=\sin\sqrt{x}$ $dy=?$

$$y=\sin u,\ u=\sqrt{x}\ .$$

Тогда

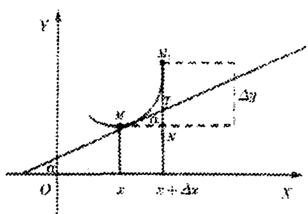
$$dy=y_u'\cdot u_x'dx=\cos u\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\cos\sqrt{x}d(\sqrt{x})$$

4.2.4. Геометрическое значение дифференциала

Рассмотрим функцию $y=f(x)$ и соответствующую ей кривой $M(x,y)$ $M_1(x+\Delta x,y+\Delta y)$

Из треугольника MNT находим

$\dfrac{NT}{MN}=tg\alpha=f'(x)\Rightarrow NT=f'(x)MN=f'(x)\Delta x.$



Согласно определению дифференциала $f'(x)\Delta x=dy.$

Таким образом, $NT=f'(x)\Delta x=dy$

Итак, дифференциал функции $f(x)$ равен приращению ординаты касательной к графику данной функции, когда аргумент получает приращение Δx.

Это и есть геометрический смысл дифференциала.

Пример 7. Дана функция $y = f(x) = x^2$.

Найти: 1) $dy = f'(x)dx$;

2) dy и Δy при переходе от точки $x = 1$ к точке $x + \Delta x = 1{,}1$ $\Delta x = 0{,}1$

Решение: 1) $dy = f'(x)dx = 2xdx = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (1{,}1)^2 - 1^2 = 1{,}21 - 1 = 0{,}21$$

$$\Delta y - dy = 0{,}01$$

4.2.5. Таблица дифференциалов

1. $dx^n = nx^{n-1}dx$
2. $d(\cos x) = -\sin x dx$
3. $d(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
4. $d(ctgx) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}dx$
5. $d(\sin x) = \cos x dx$
6. $d(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
7. $d(tgx) = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx$
8. $d(arctgx) = \dfrac{1}{1+x^2}dx$
9. $de^x = e^x dx$
10. $da^x = a^x \ln a dx$
11. $d(\ln x) = \dfrac{1}{x}dx$
12. $d(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}dx$

4.2.6. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

Нам известно, что

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x \qquad (1)$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$

Из (1) находим приблеженную формулу

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx$$

или

$$f(x + \Delta x) - f(x) \cong f'(x)dx$$

или

$$f(x+\Delta x) \cong f(x)+f'(x)dx \qquad (2)$$

С помощью приблеженную формулу (2) мы можем вычислить приближенную значении функции в точке $x+\Delta x$.

Пример 8 Вычислить приближенное значение $\arcsin 0{,}51$.

Решение. Рассмотрим функцию $y=\arcsin x$. пологая $x=0{,}5,\ \Delta x=0{,}01$ и применяя формулу (2) имеем:

$$\arcsin(x+\Delta x) \cong \arcsin x+(\arcsin x)' \cdot \Delta x$$

$$\arcsin 0{,}51 \cong \arcsin 0{,}5+\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}} \cdot 0{,}01=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{\sqrt{0{,}75}} \cdot 0{,}01=0{,}513$$

Пример 9.

$$\sqrt[4]{15{,}8}=\sqrt[4]{16-0{,}2}=\sqrt[4]{16\left(1-\frac{0{,}2}{16}\right)}=2\left(1-\frac{0{,}2}{16}\right)^{\frac{1}{4}} \cong 2\left[\sqrt{1}-\frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot \frac{0{,}2}{16}\right]=2\left[1-\frac{0{,}1}{16}\right]=1{,}9938$$

$$3\sqrt{x_0+\Delta x} \cong \sqrt{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\Delta x$$

Проиводная неявной и параметрически заданной функции. Производные высших порядков

4.3.1. Производная неявной функции

Пусть значения двух переменных x и y свяаны между собой некоторым уравнением

$$F(x,y)=0. \qquad (1)$$

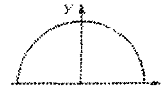
Если функция $y=f(x)$, определенная на некотором интервале (a,b), так, что уравнение (1) при подстановке в него вместо y выражения $f(x)$ обращается в тождество относительно x, то функция $y=f(x)$ есть неявная функция, определенная уравнением (1).

Например, уравнение

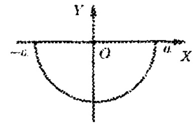
$$F(x,y)=x^2+y^2-a^2=0 \qquad (2)$$

неявно определяет следующие элементарные функции

$$y=\sqrt{a^2-x^2} \qquad (3)$$



$$y=-\sqrt{a^2-x^2} \qquad (4)$$



Действительно, после подстановки в уравнение (2) этих значений y получим тождество $x^2+a-x+a^2=0$ выражения (3) и (4) получились путем решения уравнения (2) относительно y. Но невсякую неявно заданную функцию можно представить явно, т.е можно представить в виде $y=f(x)$, где $f(x)$ есть элементарная функция.

Например, функция, заданные уравнениями $y^6-y-x^2=0$ или $y-x-\frac{1}{4}\sin y=0$, не выражаются через элементарные функции, т.е. эти уравнения нельзя разрешить относительно y.

Правило нахождения производной неявной функции такова: Дифференцируется обе части заданного уравнения $F(x,y)=0$ по x, считая, что y есть функция от x т.е сложной функции.

Например, $x^2+y^2-a^2=0$, то $2x+2yy'=0$, $2yy'=-2x$ $y'=-\frac{x}{y}$

Если будем брать соответствующую явную функцию $y=\sqrt{a^2-x^2}$ производную то получим тот же результат.

$$y'=\frac{(-2x)}{2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{y}$$

Для функции $y^6-y'-x^2=0,\ 6y^5y'-y'-2x=0 \Rightarrow y'(6y^5-1)=2x \Rightarrow$

$$y'=\frac{2x}{6y^5-1}$$

4.3.2. Производная функции, заданной параметрически

Зависимость между переменными x и y иногда удобно задавать двумя уравнениями $x=x(t),\ y=y(t)$, (1) где t – вспомогательная переменная (параметр). Особенно часто этим пользуется в механике, где параметр t обычно обозначает время, а уравнения (1) представляют собой параметрические уравнения траектории движущейся точки $M(x,y)$.

Если функция $x = x(t)$, $y = y(t)$ дифференцируемы и $x'(t) \neq 0$, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \qquad (2)$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$$

Пример 1. $x = x(t) = t^2, y = y(t) = t^3 \quad y'_x = ?$

$$x'(t) = 2t \qquad y'(t) = 3t^2; \; y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t$$

$$x = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{x} \Rightarrow y = t^3 = \left(\sqrt{x}\right)^3$$

$$y'_x = \frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}t$$

Параметрические уравнения окружности $x^2 + y^2 = R^2$ будет

$$x = R\cos t, \;\; y = R\sin t, \;\; 0 \le t \le 2\pi$$

Параметрические уравнения эллипса

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ имеет вид: $\quad x = a\cos t, \;\; y = b\sin t, \;\; 0 \le t \le 2\pi$

Пример 2. Функция y от x задана параметрически:

$$x = a\cos t, \;\; y = b\sin t, \;\; y'_x = ?$$

Решение: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}ctgt$

4.3.3. Проиводные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором отрезке $[a,b]$. Производная $f'(x)$ представляет собой тоже функции от x. Дифференцируя эту функцию, мы получаем так называемую вторую производную от функции $f(x)$.

Производная от первой производной называется производной второго порядка или второй производной и обоначается y'' или $f''(x)$, $(y')' = (f'(x))' = f''(x)$

Например, если $y = x^5$, то $y' = 5x^4 y'' = (5x^4)' = 20x^3$.

Производная от второй производной нывается производной третьего порядка или третьей производной и обоначается через y''' или $f'''(x)$.

Вообще, производной $n-$го порядка от функции $f(x)$ обозначается символом $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x)$

Имеет место очевидные формулы:

$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, (cu)^{(n)} = c \cdot u^{(n)}$$

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)} \cdot v' + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v^2 + \ldots + uv^{(n)}$$

Последная есть формула Лейбница.

4.3.4. Производные различных порядков от неявных функций

1. Покажем на примере способ нахождения производных различных порядков от неявных функций.

Пример1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad y''_x = ?$

Решение: $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x'y - xy'}{y^2} \Rightarrow$$

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - xy'_x}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y + x\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{\left(a^2y^2 + b^2x^2\right)}{a^2y^3}$$

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad y''_x = -\frac{b^2}{a^2}\frac{a^2b^2}{a^2y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

4.4.1. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя.

С помощью производной функции $f(x)$ можно получить информацию о поведения функции которые обоснованы в следующих теоремах.

Теорема Ферма. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и в точке $x_0 \in [a,b]$ принимает экстремальное значение а также существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0)=0$.

Теорема Ролля (теорема о корнях производной)

Пусть функция $f(x)$:

1) непрерывна на отрезке $[a,b]$;
2) дифференцируема в каждой точке интервала $[a,b]$;
3) принимает на концах отрезка равные значения $f(a)=f(b)$.

Тогда на интервале (a,b) найдется точка c в которой производная функции равна нулю: $f'(c)=0$

Теорема Лагранжа. Пусть функция $f(x)$:

1) непрерывна на отрезке $[a,b]$;
2) дифференцируема в каждой точке интервала (a,b).

Тогда на интервале (a,b) найдется точка c $(a<c<b)$, в которой

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow$$

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим на $[a,b]$ вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Тогда найдется точка $c\in(a,b)$, для которой $F'(c)=0$, т.е

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

Таким образом

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

или

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Эта формула называется формулой конечных приращений Лагранжа.

4.4.2. Правило Лопиталя.

В теория пределов познакомились понятиями бесконечно малые и бесконечно большие величинамы.

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$ ($a-$вещественное число или символ ∞), если для любого $\varepsilon>0$ существует окрестность точки a $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, что $|f(x)|<\varepsilon$ при $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ или $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$

Аналогично функция $f(x)$ называется бесконечно большой, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$

Пусть функция $f(x)$ и $g(x)$ одновременно бесконечно малыми или бесконечно большими при $x\to a$. Тогда говорят, что в точке $x=a$ отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет неопределенность, соответственно, вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Требуется вычислить предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{0}{0}\text{или}\frac{\infty}{\infty}\right) \qquad (1)$$

Например: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{x}\left(\frac{0}{0}\right),\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

С помощью производные $f'(x)$ и $g'(x)$ можно раскрыт неопределенностей вида (1), которое основано теоремы Лопиталя. (правило Лопиталя)

Теорема 1. (неопределенность $\frac{0}{0}$)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что:

1) непрерывны на отрезке $[a,b]$;
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)=0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)=0;$
3) существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)$ на интервале (a,b), причем $g'(x)\neq 0$
4) существует (конечный и бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (2)$$

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$$

Доказательство. Докажем для случая $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)=0$,

$$\lim_{x\to a} g(x)=g(a)=0.\quad \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}.$$

Переходим пределу когда $x\to a$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Таким образом

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ также аналогично доказывается.

Следуеть отметить, что существуют также неопределенностей вида:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^{0}, \quad 0^{0}$$

Глава V. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

5.1.1. Условие постоянства функции

Нам известно, что если функция $f(x)$ на каждом точке интервала (a,b) принимает одно и те же значение то она будет постоянной в этом интервале.

Например, $y=f(x)=2$, $x\in R$ постоянная.

Постоянность функции можно определит с помощью производной которая имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функции $y=f(x)$ имеет производную в каждой точке интервала (a,b).

Для того, чтобы эта функция была постоянной на интервале (a,b), необходимо и достаточно выполнение условия $f'(x)=0$, для всех $x\in(a,b)$.

Доказательство. ***Необходимость.*** Если $f(x)$ постоянная на (a,b), то $f'(x)=0$, $x\in(a,b)$.

Достаточность. Пусть $f'(x)=0$ для $\forall x\in(a,b)$, $x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1\neq x_2$.

По формуле конечных приращений Лагранжа имеем

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)=0,\ x_1<c<x_2,$$

т.е. значения функции в двух любых точках интервала совпадают, следовательно, $f(x)=const$.

5.1.2. Условия монотонности функции

На практике приходятся иметь дело с функциями более сложного вида. Вообще, нахождения интервалы монотонности функции на заданном множестве основано на следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную в каждой точке интервала (a,b). Для того, чтобы эта функция была монотонно возрастающей на интервале (a,b) (монотонно убывающей в этом интервале) необходимо и достаточно выполнение условия $f'(x) \ge 0$ для $\forall x \in (a,b)$ ($f'(x) \le 0$ для $x \in (a,b)$).

Доказательство. *Необходимость.*

Если $f(x)$ монотонно возрастает, то для любых x, $x+\Delta x \in (a,b)$ при $\Delta x > 0$ выполняется

$$f(x+\Delta x) \ge f(x) \Rightarrow \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) \ge 0 \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} \ge 0 \Rightarrow$$

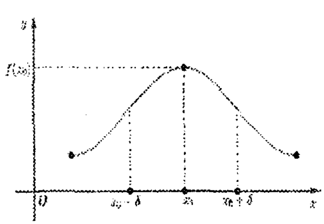
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \ge 0$$

Достаточность. Пусть $f'(x) \ge 0$, $x \in (a,b)$ $x_1 \in (a,b)$, $x_2 \in (a,b)$, $x_2 \ge x_1$. Тогда по формуле конечных приращений Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \ge 0$, $x_1 < c < x_2$, т.е $y = f(x)$ монотонно возрастает на (a,b).

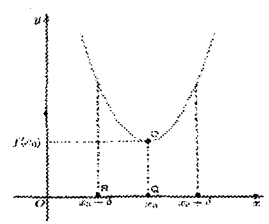
5.1.3. Экстремумы функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X и $x_0 \in X$ вместе с некоторой своей $\delta -$окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Определение 1. Точка x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$ ($f(x)$ имеет максимум в точке x_0), если для любого x из $\delta -$окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$.



max



min

Определение 2. Точка x_0 называется точкой (строго) минимума функции $f(x)$ ($f(x)$ имеет минимум в точке x_0), если для любого x из $\delta-$окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$

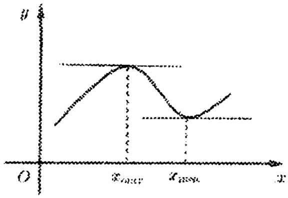
Максимум и минимум функции называют общим названием экстремум, а точка x_0- точки экстремума.

Необходимое условие экстремума

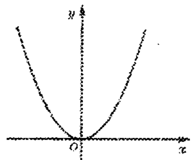
Необходимые условия существования экстремума дает теорема Ферма.

Теорема (Ферма). Если точка x_0 является $y=f(x)$ и в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0)=0$

Эта теорема имеет простой геометричесий смысл: Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке экстремума x_0, параллельно оси абсцисс.



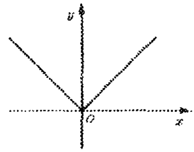
Определени 3. Точки, в которых производная функции обращается в нуль или не существует, называется критическими точками (первого рода).



Пример 1. Производная функции $y=x^2$ в точке $x_0=0$ обращается в нуль и в этой точке она имеет экстремум (минимум).

Пример 2. Производная функции $y=x^3$ в точке $x_0=0$ обращается в нуль, а экстремум в этой точке функция не имеет.

Пример 3. Функция $y=|x|$ в точке $x_0=0$ не имеет производной. Однако, в точке $x_0=0$ она имеет экстремум (минимум)



Таким образом, экстремум функции, если он существует, может быть только в критических точках. Однако не во всякой критической точке функция имеет экстремум.

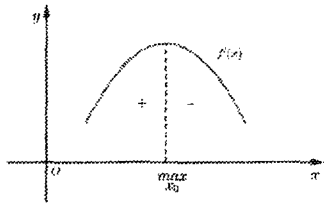
Критичность точки есть необходимое, но недостаточное условие экстремума функции.

Достаточные условия экстремума функции

Теорема 3. (Первое достаточное условие)

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 и в некоторой ее $\delta-$окрестности имеет производную, кроме, быть может, самой точки x_0. Тогда

1) если производная $f'(x)$ при переходе через точки x_0 меняет знак с плюса (+) на минус (-), то x_0 является точкой максимума.



2) если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса (-) на плюс (+), то x_0 является точкой минимума.

3) если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то в точке x_0 функция $f(x)$ не имеет экстремума.

Теорема 4. (второе достаточное условие)

Если функция $y=f(x)$ определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, причем

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0,$ то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, если $f''(x_0)<0,$ и минимум, если $f''(x_0)>0.$

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-4$$

Решение: 1) Находим производную

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-4\right)'=x^2-4x+3$$

2) Решая уравнения $f'(x)=0$ т.е $x^2-4x+3=0,$ находим критические точки $x_1=1$ и $x_2=3$.

3) Находим вторую производную:

$$f''(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-4\right)''=2x-4$$

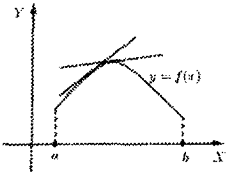
4) Определим знак второй производной в критических точках $f''(1)=''=2\cdot 1-4=-2<0$ $f''(3)=2\cdot 3-4=2>0$ значить точка $x_1=1-$ точка максимума, а $x_2=3-$ точка минимума.

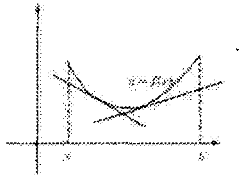
$$y_{\max}=f(1)=-2\frac{2}{3}\quad y_{\min}=f(3)=-4\,.$$

5.1.4. Выпуклость графика функции. Точки перегиба.

При исследовании поведения функции и формы ее графика, полезно установить, на каких интервалах график функции обращен выпуклостью вверх, а на каких-выпуклостью вниз.

Определение 1. График функции $y=f(x),\ x\in(a,b)$ имеет на интервале (a,b) выпуклость, направленную вверх, если он расположен не выше любой касательной, пройденной на этом интервале





Определение 2. График функции $y = f(x), x \in (a,b)$ имеет на интервале (a,b) выпуклость, направленную вниз, если он расположен не ниже любой касательной, пройденной на этом интервале.

Для более сложных функций опрделить выпуклость по определениям 1 и 2 будет сложным. Окажется с помощью производной функции легче определить выпуклость ее которую основано на следующей теореме.

Теорема 1. (Достаточное условие выпуклости графика функции).

Пусть функция $y = f(x)$, имеет на интервале (a,b) вторую производную $f''(x)$.

Если $f''(x) \geq 0, x \in (a,b)$, то её график имеет на этом интервале выпуклость, направленную вниз, а $f''(x) \leq 0$, то она имеет выпуклость направленную вверх.

Отметим, что $f''(x)$ можеть меняеть свой знак лишь в точках, где обращается в нуль, или в точках, где $f''(x)$ не существует.

Определение 3. Точки x которые производная $f''(x) = 0$, либо не существует называется критическими точками второго рода.

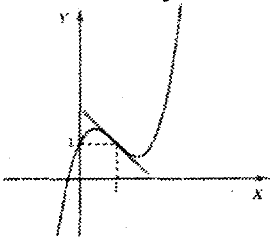
Пример 1. Иследовать на выпуклость график функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

Решение. $D(f) = R$. Находим критические второго рода

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2,\ f''(x) = 6x - 6.\ f''(x) = 0 \Rightarrow 6(x-1) = 0 \Rightarrow$$
$$x = 1$$

Исследуем интервалы $(-\infty;1)$ и $(1;\infty)$. Методом пробных точек определяем знак $f''(x)$ в этих интервалах: $x=0\in(-\infty,1)$ $f''(0)=-6<0$, $x=2\in(1,\infty)$, $f''(2)=6>0$.

Итак в точке $x=1$ производная $f''(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Таким образом, на интервале $(-\infty,1)$ график выпуклен вверх, а на интервале $(1;\infty)$ – выпуклостью вниз.



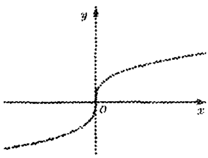
Точки перегиба

Определение 4. Точка графика непрерывной функции f(x) в которой существует касательная и при переходе через которую кривая меняет направление выпуклости, называется точкой перегиба.

Согласно определению в точке перегиба касательная к графику функции с одной стороны расположена выше графика, а сдругой –ниже, т.е. в точке перегиба касательная пересекает кривую.

1. Необходимое условие точки перегиба.

Теорема 2. Пусть $M_0(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба графика функции $y=f(x)$, и пусть в точке x_0 существует непрерывная вторая производная $f''(x)$. Тогда $f''(x_0)=0$



Замечание. Точка перегиба может быть также точка $(x, f(x))$, в которой $f''(x)$ несуществует. Например функция $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$ имеет перегиб в точке $(0,0)$, но в точке $x=0$ $f'(x)$ и $f''(x)$ не существует.

2. Достаточное условие точки перегиба

Теорема 3. Пусть функция $y = f(x)\ x \in (a;b)$ дважды дифференцируема и $x_0 \in (a;b)$ критическая точка второго рода. Если при переходе через $x_0 \in (a;b)$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба.

Доказательство. Поскольку $f(x)$ дифференцируема в $(a;b)$, то существует касательная в точке $x_0 \in (a;b)$. Пусть $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x > x_0$.

Тогда при $x < x_0$ график функции обращен выпуклостью вниз, а при $x > x_0$ – выпуклостью вверх. Таким образом, точка $(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Пример 2. Найти точки перегиба графика функции

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 7x - 4,\ x \in R$$

Решение. Находим $f'(x) = x^2 - 4x + 7$, $f''(x) = 2x - 4$

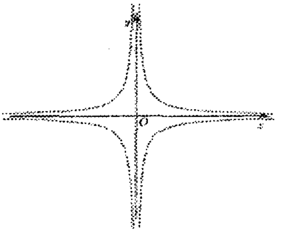
$f''(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ т.е $x = x_0 = 2$ – критическая точка второго рода.

Проверим знак $f''(x)$ в интервалах $(-\infty;2)$ и $(2;\infty)$. Берем контрольную точки $x = 0 \in (-\infty;2)$ и $x = 3 \in (2;\infty)$. $f''(0) = -4 < 0$, $f''(3) = 2 > 0$. Значит, точка кривой с абсциссой $x = 2$ является точкой перегиба.

Находим ординату точки перегиба: $f(2) = 4\frac{2}{3}$. Таким образом, точка $\left(2;4\frac{2}{3}\right)$ является точкой перегиба графика данной функции, причем на интервале $(-\infty;2)$ функция обращена выпуклостью вверх, а на интервале $(2;\infty)$ – выпуклостью вниз.

5.1.5. Асимптоты графика функции

С ростом аргумента x к бесконечности $(x \to \pm\infty)$ график функции $y = f(x)$ сколь угодно близко приближается к некоторой прямой, то эта прямая называется асимптотой графика функции $y = f(x)$. Например



функция $y = f(x) = \frac{k}{x}$, $x \neq 0$, k – постоянная имеет два асимптоты $x = 0$ и $y = 0$. Её график будет гиперболой которое при $x \to \pm\infty$ приближается к прямыми $x = 0$ (осью Оу) и $y = 0$ (осью Ox).

Асимптоты графика функции бывает: Наклонной, горизонтальной и вертикальной.

Определение 5. (наклонная асимптота).

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой кривой $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - kx - b] = 0$$

Отсюда

$$f(x) - kx - b = \alpha(x) \tag{1}$$

где $\lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$.

Из (1) имеем

$$k = \frac{f(x)}{x} - \frac{b + \alpha(x)}{x}, \; b = f(x) - kx - \alpha(x) \tag{2}$$

Из (2) вытекает, что

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \tag{3}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) \tag{4}$$

Аналогично определяется и находится асимптота кривой $y = f(x)$ при $x \to -\infty$.

Очевидно, что если $k=0$, то уравнение асимптота примет вид

$$y=b \qquad (5)$$

Определение 6. (горизонтальная асимптота)

Асимптота, определяемая уравнением (5), называется горизонтальной асимптотой.

Определение 7. (вертикальная асимптота)

Прямая x=a называется вертикальной асимптотой, если

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$$

Отметим, что прямая $x=a$ будет вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ только в случае, когда точка $x=a$ − точка разрыва второго рода этой функции.

Пример 3. Найти асимптоты кривой $y=f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-2}$

Решение. Очевидно, что

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2+1}{x-2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2+1}{x-2}=-\infty$$

то прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой. Чтобы найти наклонной асимптоты находим k и b :

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x(x-2)}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x(x-2)}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-x^2+2x}{(x-2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{(x-2)}=2$$

Итак, $y=x+2$ является наклонной асимптотой данной функции при $x\to\pm\infty$

Таким образом, данная функция имеет вертикальную асимптоту $x=2$ и наклонную

$$y=x+2.$$

5.1.6. Общая схема исследования функций и построения графиков

Схема:

1. Найти область определения функции;
2. Найти нечетность и четность
3. Проверить периодичность
4. Исследовать функции на непрерывность, найти точки разрыва
5. Найти критические точки первого рода
6. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции
7. Найти критические точки второго рода
8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба
9. Найти асимптоты графика функции
10. Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это возможно)
11. Построить график функции.

Что должен знать студент

1. Определение производной.
2. Основные правила дифференцирования.
3. Производная сложной и неявной функции.
4. Основные формулы дифференцирования.
5. Производные высших порядков.
6. Экономический смысл производной.
7. Понятие дифференциала функции и его свойства.
8. Правило Лопиталя и его использование для раскрытия неопределенностей.
9. Признаки возрастания и убывания функции.
10. Экстремумы функции. Необходимое и достаточное условия экстремума.
11. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точка перегиба.
12. Асимптоты графика функции.

Контрольный тест

1. Найдите производную функции $y = 12x - x^2 + x^4$:

а) $y = 12 - x + x^3$; б) $y = -x - x^3$;

в) $y = 12 - 2x + 4x^3$; г) другой ответ.

2. Среди приведенных функций укажите те, производная которых равна $8x$:

а) $y=(2x-4)^4$; б) $y=8x+5$;

в) $y=4x^2+10$; г) $y=4(x-5)(x+10)$.

3. Найдите производную функции $y=4\cos 2x$ в точке $x_0=-\frac{3}{4}\pi$:

а) 8; б) $4\sqrt{2}$; в) -8; г) другой ответ.

4. Найдите производную функции $y=tg^2 2x+1$:

а) $\frac{-2\sin 2x}{\cos^3 2x}$; б) $\frac{\sin 2x}{\cos^3 2x}$; в) $\frac{-2\sin 2x}{\cos^2 2x}$; г) $\frac{4tg 2x}{\cos^2 2x}$.

5. Найдите производную функции $y=\frac{1}{3}x^3+x^2+2$:

а) $y=x^2+2x+2$; б) $y=x^2+x$;

в) $y=x^2+2x$; г) другой ответ.

6. Найдите производную функции $y=\sin\frac{x}{2}$:

а) $2\cos\frac{x}{2}$; б) $\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$; в) $2\sin\frac{x}{2}$; г) $\cos\frac{x}{2}$.

7. Функция $y=x^2-4x+4$:

а) убывает в интервале $(-\infty;2)$ и возрастает в интервале $(2;\infty)$;

б) убывает в интервале $(-\infty;-2)\cup(-2;2)$ и возрастает в интервале $(2;\infty)$;

в) убывает в интервале $(-\infty;-2)$ и возрастает в интервале $(-2;\infty)$;

г) убывает в интервале $(-\infty;2)$, не возрастает.

8. Значение минимума функции $y=x^3-12x$:

а) $y(-2)=16$; б) $y(2)=-16$; в) $y(\sqrt{2})=1$; г) имеет бесконечно много решений.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите производную функции $f(x)=2x^2+1$ в точке $x_0=1$.

   Ответ: $f'(1)=4$

2. Найдите производную функции $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$.

   Ответ: $f'(x)=\dfrac{-3x^2-1}{2\sqrt{x}(x^4-2x^2+1)}$

3. Найдите производную функции $y=3^x\cdot(x^4-3x+10)$.

   Ответ: $f'(x)=3^x(x^4\ln 3-3x\ln 3+10\ln 3+4x^3-3)$

4. Найдите производную функции $y=\sin(3x^2+6x-2)$.

   Ответ: $f'(x)=\cos(3x^2+6x-2)\cdot(6x+6)$.

5. Найдите производную функции $y=\ln(\frac{5}{x^3}-3\sqrt[4]{x^5}-x+7)$.

   Ответ: $f'(x)=\dfrac{-\frac{15}{x^4}-\frac{15}{4}\sqrt[4]{x}-1}{\frac{5}{x^3}-3\sqrt[4]{x^5}-x+7}$.

6. Найдите производную функции $y=\ln\arcsin 6x$.

   Ответ: $f'(x)=\dfrac{6}{\arcsin 6x\sqrt{1-36x^2}}$.

7. Найдите в точке $x=0$ производную функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3e^{4x}+5}}$ и дифференциал функции в этой точке.

8. Найдите производную функции $f(x)=\dfrac{\cos 7x}{\sqrt{1-3x^4}}$.

9. Найдите производную функции $y=3^{tgx}\cdot\sin 5x$.

10. Составьте уравнения касательной и нормали к кривой $y=\sqrt[3]{x}-1$ в точке с абсциссой $x_0=8$.

11. Найдите производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $x^3y+y^4-x-7=0$ в точке $M_0(2;1)$.

12. Найдите дифференциал функции $y = x\cos(3x)$.

13. Найдите дифференциал функции $y = 2arctg\sqrt{\sin x}$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

14. Для $f(x) = \sqrt{3x-2}$ найдите вторую производную $f''(x)$.

15. Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = \frac{t^3}{3} - 4t^2 + 5t - 2$. В какой момент времени ускорение равно нулю?

16. Вычислите пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1 + \ln x}$; б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3e^{2x} + 1}{4e^{5x} - x}$.

17. Найдите экстремумы функции $f(x) = 3x - x^3$.

18. Найдите экстремумы функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

19. С помощью производной первого порядка найдите интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$.

20. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2$ на отрезке $[1;4]$.

Глава VI: ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

6.1.1. Введение

В современной математике, а также ряд разделов физики и техники (электротехнике, электронике, механике, гидродинамике, аэродинамике и др.) помимо действительных чисел используются числа более общей природы, которые называются комплексными числами.

В истории развития математики комплексные числа первоначально возникла в связи с решением алгебраических уравнений.

Как известно, действительные корни уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

находятся по фомуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \qquad (2)$$

где $D=b^2-4ac$.

Если $D>0$, то уравнение (1) имеет два корня. Если же $D<0$ уравнение (1) в множестве действительных чисел не имеет решений.

Например уравнение $x^2-2x+4=0$ $D=4-4\cdot4=-12<0$. Значит, для этого уравнения формула (2) неприменима. Следовательно, тот факт, что из отрицательного числа нельзя извлечь квадратный корень, не может еще служит причиной для введения в математике новых чисел.

Теперь рассмотрим уравнения третьей степени

$$y^3+ay^2+by+c=0$$

При помощи подстановки $y=x-\frac{a}{3}$ получим

$$x^3+px+q=0 \qquad (3)$$

Для решения уравнения (3) в XVI веке была найдена формула Кардано (италянский математик (1501-1576))

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D_1}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D_1}} \qquad (4)$$

где $$D_1=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Если $D_1 \geq 0$, то уравнения (3) имеет один корень, а если $D \leq 0$, то оказывается оно не имеет действительных корней.

Если же $D_1 < 0$, то извлечение квадратного корня из D_1 становится невозможным, тем не менее уравнение (3) в этом случае имеет три действительные корни.

Пример 1. Найти куб, объем которого на четыре единицы меньше полусуммы его ребер.

Решение: Обозначим через x длину ребра искомого куба, его объем будет x^3, а полусумма ребер 6x. Тогда по условию примера имеем уравнению $x^3+4=6x$,

$$x^3-6x+4=0 \qquad (5)$$

$p=-6$ $q=4$. Согласно по формуле (4) получаем

$$x=\sqrt[3]{-\frac{4}{2}+\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(-\frac{6}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{4}{2}+\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(-\frac{6}{3}\right)^3}}=$$

$$=\sqrt[3]{-2+\sqrt{-4}}+\sqrt[3]{-2-\sqrt{-4}}=\sqrt[3]{-2+2\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{-2+2\sqrt{-1}}.$$

Думается, что уравнение не имеет действительных корней, однако уравнение (5) имеет три действительных корня: $x_1=2$ $x_2=-1+\sqrt{3}\approx 0{,}73$ $x_3=-1-\sqrt{3}\approx -2{,}73$ условию задачи удовлетворяет первые два корня.

Таким образом, для расширения понятия действительного числа вели новую числу $i=\sqrt{-1} \Rightarrow i^2=-1$

6.1.2. Определение комплексных чисел. Сложение и вычетание

Определение 1. Комплексным числом называется выражение $a+bi$, где a и b действительные числа, а $i-$ называется мнимой единицей.

Запись $a+bi$, называется алгебраической формой комплексного числа.

Если $z=a+bi$, то $a-$ называется действительной частью, а $b-$мнимой частью комплексного числа z и обозначается $a=\mathrm{Re}\,z$, $b=\mathrm{Im}\,z$.

Определение 2. Комплексные числа $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ называются равными тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$.

Определение 3. Суммой комплексных чисел $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ называется комплексное число $z=(a+c)+(b+d)i$.

$$z=z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \tag{1}$$

Разность комплексных чисел z_1 и z_2 имеет вид:

$$z=z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i \tag{2}$$

Определение 4. Произведением комплексных чисел $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ называется комплексное число

$$z=z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i \tag{3}$$

Пример 1. $z_1=2-3i$ и $z_2=-4+2i$. Найти

$$z=z_1\cdot z_2=(2-3i)(-4+2i)=-8+4i+12i-6i^2=-8+16i+6=-2+16i\,.$$

Определение 5. Частным комплексных чисел $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ называется комплексное число

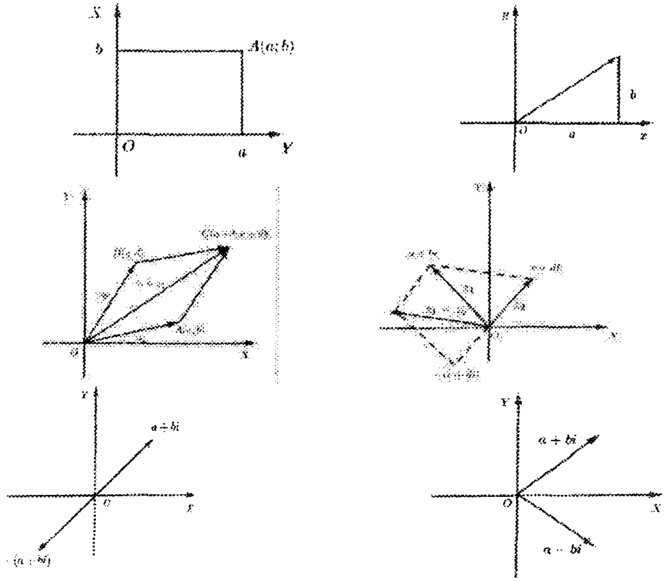
$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \tag{4}$$

Пример 2. $z_1=2-3i$ и $z_2=1+2i$. Найти $z=\dfrac{z_1}{z_2}=?$

Решение. $z=\dfrac{2-3i}{1+2i}=\dfrac{2-3i}{1+2i}\cdot\dfrac{1-2i}{1-2i}=\dfrac{2-4i-3i+6i^2}{1^2-(2i)^2}=\dfrac{-4-7i}{5}=\dfrac{-4}{5}-\dfrac{7}{5}i$

6.1.3. Геометрическая интерпритация комплексного числа

Каждое комплексное число $a+bi$ геометрически изображается на плоскости как точка $A(a;b)$ или как вектор $\overline{OA}$ с началом в начале координат и с концом в точке $A(a;b)$.



6.1.4. Модуль и аргумент комплексного числа

Определение 1. Модулем комплексного числа $z=a+bi$ называется длина (модуль) соответствующему вектора.

Модуль обозначается символом $|z|$ или через r. $|z|=r\geq 0$.

$$|z|=r=\sqrt{a^2+b^2} \tag{1}$$

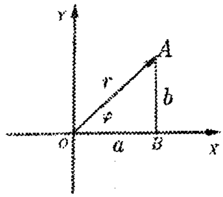
Если $z=a+0\cdot i$ – действительное число, то $|z|=r=\sqrt{a^2}=|a|$,

Аналогично, если $z=bi=0+bi$, то $|z|=r=\sqrt{0^2+b^2}=\sqrt{b^2}=|b|$

В частности, $|\pm i|=|\pm 1|=1$

Пример 1. $z=4-3i$ $|z|=r=?$ $|z|=r=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$

Множество всех чисел z, для которых $|z| = r$, представляет окружность радиусом r с центром в начале координат.



Аргумент комплексного числа.

Определение 2. Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется величина любого направления угла, образованного положительным направлением с оси Ox и вектором $\overline{OA}$, соответствующим числу z.

Аргумент числа z обозначается символом $\arg z$ или $\varphi = \arg z$. Числа r и φ могут быть рассмотрены как полярные координаты точки $z = a + bi$.

Из ΔOAB имеем

$$\frac{a}{r} = \cos\varphi, \quad \frac{b}{r} = \sin\varphi \qquad (2)$$

По формулам (2) можно найти значение аргумента φ. В зависимости точка $z = a + bi$ каком квадранте находится аргумент определяется по формулам

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{b}{a}, a > 0, b > 0 \\ \pi - arctg\dfrac{b}{-a}, a < 0, b > 0 \\ \pi + arctg\dfrac{b}{a}, a < 0, b < 0 \\ 2\pi - arctg\dfrac{-b}{a}, a > 0, b < 0 \end{cases}$$

6.1.5. Тригонометрическая форма комплексного числа

Из (2) имеем

$$a = r\cos\varphi, \; b = r\sin\varphi \qquad (3)$$

При помощи формул (3) можно перейти от алгебраической формы $z = a + bi$ комплексного числа к новой записи комплексного числа

$$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$$

или

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (4)$$

Полученное выражение называется тригонометрической формой комплексного числа.

Пример 1. Найти модуль и аргумент комплексных чисел и записать их в тригонометрической форме.

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};\ z_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$$\varphi_1 = arctg\frac{b}{a} = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$\varphi_2 = \pi - arctg\frac{b}{-a} = \pi - arctg\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

$$\varphi_3 = \pi + arctg\frac{b}{a} = \pi + arctg\sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} = 240^\circ$$

$$\varphi_4 = 2\pi - arctg\frac{-b}{a} = 2\pi - arctg\sqrt{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} = 300^\circ$$

6.1.6. Умножение и возведение в степень комплексных чисел заданными в тригонометрической форме

1. Умножение. Пусть даны комплексные числа

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ и } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Для произведения этих чисел имеет место следующее формула:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \qquad (1)$$

Таким образом, модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей.

Следовательно,

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

Пример 1. $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

$$z_1\cdot z_2=2\cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right]=6\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}.$$

2. Возведение в степень.

Если комплексное число $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ самому себя умножаем n раз, то получим

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \qquad (2)$$

Формула (2) называется фомулой *Муавра (1667-1754)- английский математик.*

Таким образом, чтобы возвести комплексного числа в натуральную степень нужно возвести в эту степень его модуль r, а аргумент умножить на показатель степени.

Пример 2. Вычислить $(1+i)^{10}$.

Решение. Найдем тригонометрическую форму числа $1+i$.

$$a=b=1\ r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}\ \varphi=arctg\frac{b}{a}=arctg1=\frac{\pi}{4}.$$

Тогда

$$(1+i)^{10}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10}=\left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4}+i\sin\frac{10\pi}{4}\right)=$$

$$=2^5\left(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2}\right)=32(0+i)=32i$$

3. Деление.

Пусть даны комплексные числа

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1) \text{ и } z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

Для частного этих чисел имеет место формула

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right] \qquad (3)$$

Итак, модуль частного двух комплексных чисел z_1 и z_2 равен частному модулей, а аргумент частного равен разности аргументов.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{r_1}{r_2}\right| = \frac{r_1}{r_2},\ \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

Пример 3. Даны комплексные числа

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ и } z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

Найти частное

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{3}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{17\pi}{12}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(2\pi - \frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{7\pi}{12}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right]$$

6.1.7. Извлечение корня из комплексного числа

Определение 1. Корнем n-й степени, $n \in N, n \geq 2,$ из числа z называется любое комплексное число w для которого

$$w^n = z \Rightarrow w = \sqrt[n]{z}$$

Для извлечения корня n-й степени имеет место формула

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \tag{5}$$

где $k = 0,1,2\ldots,n-1$.

Пример 4. Вычислить $\sqrt[3]{1+i}$

Решение. $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$w_k = \sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right),$$

где $k = 0,1,2$

$$w_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right),\quad w_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right),$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

6.1.8. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (6)$$

Это формула носит название формулой Эйлера.

Показательная форма комплексного числа имеет вид:

$$z = re^{i\varphi} \qquad (7)$$

Упражнения:

1) Перевести из алгебраической в тригонометрическую и показательную форму: $z=4-4i$

2) Даны комплексные числа $z_1 = 3+5i$, $z_2 = 3-4i$, $z_3 = 1-2i$.

Найти число $z = \dfrac{(z_1+z_3)\cdot \bar{z}_2}{z_3}$.

3) Вычислить сумму и разность заданных комплексных чисел: $z_1 = 3+5i$ $z_2 = 3-4i$

4) Представить в тригонометрической и показательной формах и изобразить на комплексной плоскости следующие комплексные числа:

а) $z_1 = 2-2i$; б) $z_2 = -i$; в) $z_3 = \sqrt{3}+i$.

5) Решить уравнения а) $x^2+4x+5=0$; б) $x^2+9=0$.

6) Выполнить умножение и деление комплексных чисел:

$z_1 = 2-2i$ $z_3 = \sqrt{3}+i$

Возвести комплексное число $z=3+3i$ в степень: а) n=2 б) n=7

7) Извлечь корень $\sqrt[3]{-1}$

8) Решить квадратное уравнение $x^2+2x+2=0$

Глава VII. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Введение

Нам известно из школьной математики что математические действия будут по парами и взаимно и обратными действиями. Например сложение и вычисления, умножения и деления, возведения в степень и извлечение корня и так далее.

В предыдущем разделе мы познакомились действием или понятием производная функции. Для нахождения производной существует обратная действия интегрирование или первообразной функции.

Теперь нам будет известно производная функции и по этим производнаям найти такую функцию $F(x)$ которая производная ее будет равна $f(x)$, т.е.

$$f(x) = F'(x), \quad x \in R.$$

Например $f(x) = 2x, x \in R$, то $F(x) = x^2, x \in R$.

Таким бразом по известним производням нахождение первоначальную функцию принято называт первообразную функцию.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале $X \in (a,b)$ (конечном или бесконечном), если в каждой точке этого интервала $f(x)$ является производной для $F(x)$, т.е.

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

или

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Первообразная определена неоднозначно:

Например, для $f(x) = 2x$, $F(x) = x^2, x \in R$ но можно показать, что $H(x) = x^2 - 1$, $G(x) = x^2 + 3$ также является первообразнами для $f(x) = 2x$, $x \in R$.

Для того, чтобы описать все множество первообразных функции $f(x)$, рассмотрим следующие свойства первообразной.

Свойства первообразной.

1°. Если функция $F(x)$-первообразная для функции $f(x)$ на интервале X, то функция $F(x)+C$, где C - произвольная постоянная, тоже будет первообразной для $f(x)$ на этом интервале.

Доказательство: $F'(x) = (F(x) + C) = f(x)$,

потому что $C' = 0$

2°. Если функция $F(x)$-некоторая первообразная для функции $f(x)$ на интервале X=(a,b), то любая другая функция первообразная $F_1(x)$ может быть представлена в виде $F_1(x) = F(x) + C$, где C - произвольная постоянная на X.

Доказательство: Так как функции $F(x)$ и $F_1(x)-$перво-образные для $f(x)$, то $F'(x) = F_1'(x) = f(x) \Rightarrow (F(x) - F_1(x))' = 0$

Нам известно, что производная функция будет равен нулю, если она будет постоянная.

Поэтому из последнего вытекает $F(x) - F_1(x) = C$ или $F_1(x) = F(x) + C$.

3°. Для любой первообразной F(x) выполняется равенство

$$dF(x) = f(x)dx$$

Из этих свойств следует, что если $F(x)-$некоторая первообразная функция $f(x)$ на интервале X, то всё множество первообразных функции $f(x)$ на этом интервале описывается выражением $F(x)+C$, $C-$произвольная постоянная.

7.1.2. Неопределенный интеграл и его свойства.

Определение 2. Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается символом

$$\int f(x)dx.$$

Итак, если $F(x)-$некоторая первообразная функцию $f(x)$ принято называть подынтегральной функций, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{2}$$

где C – произвольная постоянная. Функцию $f(x)$ принято называть подынтегральной функций, а $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Свойства неопределенного интеграла:

1°. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

2°. $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$

3°. $\int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C$

4°. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, где k – постоянная

5°. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Например $\int (2x + x^2)dx = \int 2xdx + \int x^2 dx = x^2 + \frac{x^3}{3} + C$

7.1.3. Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
4. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \sin xdx = -\cos x + C$
7. $\int \cos xdx = \sin x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + m}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + m}\right| + C, m -$ пост.ч

14 $\int \sqrt{x^2+m}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+m} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right| + C$

15. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$

17. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right| + C$.

7.1.4. Простейшие правила интегрирования

1) Подведение под знак дифференциала постоянного слагаемого:

если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(x+a)dx = F(x+a)+C$

$(a - \textit{постоянная})$

Например: $\int \cos(x+3)dx = \int \cos(x+3)d(x+3) = \sin(x+3)+C$

2) Подведение под знак дифференциала постоянного множетеля: $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)+C$

Например: $\int \frac{dx}{\sin^2 3x} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sin^2 3x} = -\frac{1}{3}ctg3x + C$

Вообщее имеет место формула:

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$ $a,b -$ постоянная.

7.1.5. Замена переменной в неопределенном интеграле (интегрирование подстановкой)

Этот способ интегрирование основано на производную сложной функции.

Пусть $\int f(x)dx = F(x)+C$. Если $x = g(t)$ то получим

$$\int f[g(t)]dg(t) = \int f[g(t)]g'(t)dt = F[g(t)]+C \qquad (3)$$

$$F'[g(t)] = f[g(t)]$$

Действительно, $[F(g(t))]' = f[g(t)]g'(t)$. Итак $F[g(t)]$ является первообразной для $f(g(t))g'(t)$, т.е.

$$\int f[g(t)]dg(t) = F[g(t)] + C$$

Пример 1. $\int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

Пример 2. $\int e^{\sin x}\cos xdx = \int e^{\sin x}d(\sin x) = e^{\sin x} + C$

Тепер зделаем замены переменной

$$\sin x = t \Rightarrow x = \arcsin t \Rightarrow dx = d(\arcsin t) \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}$ и так,

$$\int e^{\sin x}\cos xdx = \int e^t\sqrt{1-t^2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int e^t dt = e^t + C$$

7.1.6. Интегрирование по частям.

Интегрирование по частям основано на нахождение производную произведению.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – функции имеющие непрерывные частные производные. Тогда по формуле дифференцирования произведения имеем:

$$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow udv = d(uv) - vdu$$

Находим неопределенные интегралы для обоих частей этого равенства

Поскольку $\int d(uv) = uv + C$, то

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu \qquad (4)$$

Эта формула и называется формулой интегрирования по частям

Пример 3: $\int x\sin xdx \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ dv = \sin xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ \int dv = \int \sin xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$\int x\sin xdx = (uv - \int vdu) = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C$$

Пример 4: $\int \ln x dx \Rightarrow \begin{cases} u = \ln x dx \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$$

Метод интегрирование по частям применяются интегралом вида $\int P(x) f(x) dx$, где $P(x)-$ многочлен, а

$$f(x) = \{\sin ax, \cos ax, a^x, e^{ax}, \ln x, \arcsin x, \arccos x, arctgx, arcctgx\}$$

При вычисление этого вида интеграла имеет место два случая:

__*1-случай.*__ Если $f(x) = \{\sin ax, \cos ax, a^{mx}, e^{ax}\}$, то в качестве $u = u(x)$ берут многочлен $P(x)$

т.е. $u = P(x)$ $dv = f(x)dx$.

__*2-случай.*__ Если $f(x) = \{\ln x, \arcsin x, \arccos x, arctgx, arcctgx\}$, то в этом случае в качестве $u = u(x)$ удобно взять

$$u = f(x), dv = P(x)dx$$

Пример 1. Вычислит интеграл.

$$\int x \cos x dx \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int x \cos x dx = uv - \int v du = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

Пример 2. Вычислит интеграл $\int x \ln x dx$.

$$\int x \ln x dx = \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int x \ln x dx = uv - \int v du = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx == \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Замечание. *Отметим, что в некоторых случаях при вычисление исходного интеграла этот метод применяется неськолко раз.*

Рациональные дроби. Простейшие рациональне дроби и их интегрирование

7.2.1. Интегрирование рациональных дробей

Можно показать, что не всякая элементарная функция имеет интеграл, выражающейся в элементарных функциях. Поэтому очень важно выделить такие классы функций интегралы которых выражаются через элементарные функции. Простейшим из этих классов является класс рациональных функций.

Пусть заданы многочлены $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ или целые рациональные функции со степенями n и m соответственно, т.е.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

где $a_i, b_j, (i = \overline{0,n}, j = \overline{0,m})-$ числы которые называются коэффициентами многочленов.

Дробю вида $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}-$ называют дробно рациональная функция или просто рациональный дробь. Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

Если $n < m,$ то дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}-$ называется правильным, в противном случае т.е. $n > m,$ то она называется неправильным. Всякая неправильной дробь можно представить в виде сумме многочлена и некоторой правильной дроби:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = H(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}, \text{ где } k < m.$$

Например, $$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1} = x + 2 + \frac{2x - 1}{x^2 + 1}$$

Таким образом, интегрирование неправильную дробь сводятся интегрирование правильную дробю.

1. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.

Определение. Правильные рациональные дроби вида

I. $\dfrac{A}{x-a}$,

II. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$

III. $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ $(D=b^2-4ac<0)$

IV. $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$ $(D=b^2-4ac<0)$, k – целое положительное число, $k\geq 2$)

Называются простейшими дробями I,II,III и IV типов.

Дробей типа I,II и III легко интегрируется:

I. $$\int\frac{A}{x-a}dx=\int\frac{Ad(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C$$

II. $$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C,$$

III. $$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-A\frac{b}{2a}}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k^2\right]}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}+$$

$$+\left(B-A\frac{b}{2a}\right)\int\frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k^2\right]}=\frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c|+\frac{\left(B-A\frac{b}{2a}\right)}{ak}arctg\frac{(x+\frac{b}{2a})}{k}$$

где $k^2=\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$

Более сложных вычислений требует интегрирование простейших дробей IV типа.

Рассмотрим интеграл этого типа, т.е.

IV. $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}dx$

Сделаем переобразования:

$$Ax+B=\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-A\frac{b}{2a}. \text{ Тогда}$$

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}dx=\frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^k}dx++\left(B-\frac{A}{2a}\cdot b\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^k}$$

Второй интеграл обозначим через I_k.

Первый интеграл вычисляется подстановкой $t=ax^2+bx+c \Rightarrow dt=(2ax+b)dx$

$$\frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^k}=\frac{A}{2a}\int \frac{dt}{t^k}=\frac{A}{2a}\int t^{-k}dt=\frac{A}{2a}\cdot\frac{t^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{A}{2a}\cdot\frac{1}{(-k+1)(ax^2+bx+c)^{k-1}}+C$$

Теперь покажем как интегрируется второй интеграл т.е. I_k.

$$I_k=\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^k}=\frac{1}{a^k}\int \frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+m^2\right]^k}$$

Обозначим $x+\frac{b}{2a}=t,\ dx=dt,\ m^2=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$

$$I_k=\frac{1}{a^k}\int \frac{dt}{\left[t^2+m^2\right]^k}=\frac{1}{a^km^2}\int \frac{\left[t^2+m^2-t^2\right]dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=$$

$$=\frac{1}{a^km^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{a^km^2}\int \frac{t^2dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}$$

Интегрируя второй интеграл по частяммы получим рекурентную формулу:

$$I_k=\frac{1}{2a^km^2(k-1)}\cdot\frac{tdt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}+\frac{1}{a^km^2}\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}.$$

После $(k-1)-$кратного применения этого формула интеграл I_k сводится к табличному

$$\int \frac{dt}{t^2+k^2} = \frac{1}{k} arctg \frac{t}{k} + C$$

Рассмотрим пример для интеграла IV типа.

Пример 1. $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

Решение. $n=2$. Применим реккурентную формулу

$$I_k = \frac{1}{2a^2m^2(k-1)} \cdot \frac{tdt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}} + \frac{1}{a^2m^2} \frac{2k-3}{2k-2} I_1.$$

В нашем примере $a=1$ $m=1$, $k=2$

Тогда

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} arctgx + C.$$

Пример 2. $I_2 = \int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}dx$

$$3x+2 = \frac{3}{2}(2x+2)+2-3 = \frac{3}{2}(2x+2)-1$$

$$I_k = \frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+10)^2}dx - \int\frac{dx}{\left[(x+1)^2+3^2\right]^2} + C = -\frac{3}{2}\frac{1}{(x^2+2x+10)} - \frac{1}{18}\frac{x+1}{x^2+2x+10} -$$

$$-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+3^2} = -\frac{3}{2}\frac{1}{(x^2+2x+10)} - \frac{1}{18}\frac{x+1}{x^2+2x+10} - \frac{1}{54} arctg\frac{x+1}{3} + C$$

Всякая рациональная дробь вида $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ можно представить в виде сумму простейших дробей, которые оно зависить корнями $Q_m(x)$.

Возможны следующие случаи:

<u>1-случай.</u> Корни $Q_m(x)$ действителны и различны, т.е.

$$Q_m(x) = (x-a)(x-b)\cdots(x-d)$$

Тогда

$$\frac{R_k(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{D}{x-d}$$

Например:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

2-случай Корни $Q_m(x)$ действительные, причем некоторые из них кратные:

$$Q_m(x)=(x-a)^{\alpha}\cdot(x-b)^{\beta}\cdots(x-d)^{\delta}$$

Например:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3\cdot(x-3)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x-3}$$

3-случай. Среди корней $Q_m(x)$ есть комплексные и различные

$$Q_m(x)=(x^2+px+q)\cdots(x^2+lx+s)(x-a)^{\alpha}\cdots(x-d)^{\delta}$$

Например:

$$\frac{1}{x^2\cdot(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

3-случай. Среди корней $Q_m(x)$ есть комплексные кратные:

$$Q_m(x)=(x^2+px+q)^{\alpha}\cdots(x^2+lx+s)^{\beta}(x-a)^{\gamma}\cdots(x-d)^{\delta}$$

Например:

$$\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}$$

$$x^3-2x=Ax+B+(Cx+D)(x^2+1)$$

$$x^3-2x=Ax+B+Cx^3+Cx+Dx^2+D$$

$$x^3+0\cdot x^2+2x+0=Cx^3+Dx^2+(A+C)x+B+D$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$x^3\big|1=C\Rightarrow C=1$$

$$x^2\big|0=D\Rightarrow D=0$$

$$x\big|-2=A+C\Rightarrow A=-3$$

$$x^0\big|0=B+D\Rightarrow B=0$$

Итак

$$\int\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{-3x}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{x}{(x^2+1)}dx=-\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

Пример 4. Найти интеграл $\int\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$

Решение. $\frac{R_2(x)}{Q_3(x)}=\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$

Поскольку $Q_3(x)=(x-1)(x-2)(x-4)=0$ т.е. знаменатель имеет три различных корни $x_1=1$ $x_2=2$ $x_3=4$

Тогда согласно случай 1 имеем:

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}\Rightarrow$$

$$x^2+2x+6=A(x-2)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x-2)$$

В последнем равенстве пологая, $x_1=1$ $x_2=2$ $x_3=4$ мы находим коэффициенты $A=3,\ B=-7$, $C=5$ соответственно.

Таким образом

$$\int\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\int\frac{3dx}{x-1}-\int\frac{7dx}{x-2}+\int\frac{5dx}{x-4}=$$

$$=3\ln|x-1|-7\ln|x-2|+5\ln|x-4|+C=\ln\frac{|x-1|^3|x-4|^5}{|x-2|^7}+C$$

7.2.2. Интегрирование иррациональных выражений

1. Интеграл вида $\int\sqrt[n]{ax+b}dx$

В этом интеграле удобно подстановка

$$t=\sqrt[n]{ax+b}\Rightarrow t^n=ax+b\Rightarrow x=\frac{1}{a}(t^n-b)\Rightarrow dx=\frac{n}{a}t^{n-1}dt.$$

$$\int\sqrt[n]{ax+b}dx=\int t\frac{n}{a}t^{n-1}dt=\frac{n}{a}\int t^n dt=$$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{a}t^{n+1}+C=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{a}t\cdot t^{n}+C=$$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{a}\left[(ax+b)\sqrt[n]{ax+b}\right]+C$$

2. Интеграл вида $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Интегрируется с помощью дополнения квадратного трехчлена ax^2+bx+c до полного квадрата и сводятся к одному из двух интегралов

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \text{ и } \int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

Нам известно что

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C \quad \text{и } (x=a\sin t) \qquad (1)$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C \quad (\sqrt{a^2+x^2}=t-x) \qquad (2)$$

$$\sqrt{a^2+x^2}=t-x\Rightarrow a^2+x^2=t^2-2tx+x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=(2t-2x)dt-2tdx\Rightarrow(2t-2x)dt=2tdx\Rightarrow(t-x)dt=tdx$$

$$\frac{dx}{(t-x)}=\frac{dt}{t}\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{dt}{t}=\ln|t|+C$$

Из $\sqrt{a^2+x^2}=t-x\Rightarrow t=x+\sqrt{a^2+x^2}$.

Имеем табличный интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C$

Пример 2 . $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}}=\int\frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2+4}}\Rightarrow$

Согласно интегралу (2) имеем

$$\ln|(x-3)+\sqrt{(x-3)^2+4}|+C=\ln|(x-3)+\sqrt{x^2-6x+13}|+C$$

3. Интеграл вида $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$

В этом интеграле удобно подстановка $x=a\sin t$ и можно показать, что

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right]+C \qquad (3)$$

4. Интеграл вида $\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Этот интеграл путем замены $t=\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)'$ сводятся к интегралу

$$\int\frac{Dt+E}{\sqrt{kt^2+m}}dt$$

Пример 3. $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$

Решение. $t=\frac{1}{2}(x^2+4x+5)'=x+2\Rightarrow x=t-2\Rightarrow dx=dt\Rightarrow$

$$\Rightarrow\int\frac{(t-2)dt}{\sqrt{(t-2)^2+4(t-2)+5}}=\int\frac{(t-2)dt}{\sqrt{t^2+1}}=\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}-2\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=\sqrt{t^2+1}-2\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=\sqrt{x^2+4x+5}-2\ln\left|x^2+4x+5\right|+C$$

Пример 4. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}=\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}}=\arcsin\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}+C=\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C,$$

где

$$F(x)=\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\quad F'(x)=f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}$$

7.2.3. Интегрирование тригонометрических выражений

1. В приложениях важное значение имеют интегралы

$$\int\sin^m x\cdot\cos^n x dx \qquad (1)$$

где m и n целые неотрицательные числа.

Здесь различают два случая:

Случай 1. Если хотя бы один из показателей m и n есть число нечетное, то они интегрируется непосредственно.

Пример 5. $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$

Решение. $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \sin^2 x d(\sin x) = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

Пример 6. $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$

Решение.

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot (\sin x) dx = -\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot d(\cos x) \Rightarrow$$

$$-\int (1-\cos^2 x) \cdot \cos^2 x \cdot d(\cos x) = -\int \cos^2 x \cdot d(\cos x) + \int \cos^4 x \cdot d(\cos x) =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

Случай 2. Если оба показатели m и n есть числа четные, то для вычисления интеграла (1) используют формулы двойного аргумента

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \text{ и}$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

Пример 7. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

Решение.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos)^2 \cos^2 x dx = \int (\frac{\sin 2x}{2})^2 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x) dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x \cdot d(\sin 2x) = \frac{1}{16}\int 1 dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x dx + \frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3} =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$$

2. В теории рядов Фурье важное значение имеют интегралы вида

$$\int \sin ax \cdot \sin bx dx,$$

$$\int \cos ax \cdot \cos bx dx,$$

$$\int \sin ax \cdot \cos bx dx.$$

Эти интегралы вычисляются на основании формул тригонометрии:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right]$$

Пример 8. $\int \sin x \cdot \sin 5x dx$

$$\int \sin x \cdot \sin 5x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x - \cos 6x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 4x dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x dx = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x + C$$

3. Интегралы вида $\int tg^m x dx$ и $\int ctg^m x dx$ вычисляются с помощью замены

$$tgx = t \Rightarrow x = arctgt \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

Пример 9. $\int tg^2 x dx$

Решение.

$$\int tg^2 x dx = \int t^2 \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt == \int dt - \int \frac{1}{1+t^2}dt = t - arctgt + C = tgx - x + C$$

4. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$,

где R рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$. В таких интегралах удобно сделать подстановки

$$tg\frac{x}{2}=t \Rightarrow \frac{x}{2}=arctgt \Rightarrow x=2arctgt \Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

Пример 10. $\int\frac{1}{\sin x}dx$.

$$\sin x=\frac{2t^2}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow\int\frac{1}{\frac{2t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{dt}{t^2}=\int t^{-2}dt=\frac{t^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}}+C$$

Что должен знать студент

1. Понятие первообразной функции.
2. Понятие неопределенного интеграла.
3. Свойства неопределенного интеграла.
4. Таблица неопределенных интегралов.
5. Основные методы интегрирования (метод непосредственного интегрирования, интегрирование заменой переменной, интегрирование по частям).
6. Понятие правильной и неправильной рациональной дроби.
7. Интегрирование рациональных дробей, метод неопределенных коэффициентов.
8. Интегрирование простейших иррациональных и некоторых тригонометрических функций.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

1. Интеграл $\int F'(x)dx$ равен:

а) $F'(x)+c$; б) $dF(x)$; в) $F(x)$; г) $f(x)+c$.

2. Формула интегрирования по частям в неопределённом интеграле имеет вид:

а) $\int udv = uv - \int udu$; б) $\int udv = uv - \int vdv$;

в) $\int udu = uv + \int vdu$; г) $\int udv = uv - \int vdu$.

3. Для вычисления интеграла $\int \frac{dx}{3-\sqrt{x+2}}$ используется:

а) замена $t = 3-\sqrt{x+2}$; б) замена $u = \sqrt{x+2}$; в) интегрирование по частям; г) замена $u = x+2$.

4. Интеграл от простейших рациональных дробей I типа $\frac{1}{x+a}$ ($a \in \mathbf{R}$) равен:

а) $(x+a)^{-2}+c$; б) $-(x+a)^{-2}+c$; в) $\ln|x+a|+c$;

г) $\ln|x|+\ln|a|+c$.

6. Вычислить $\int \sqrt{\cos x}\sin x dx$ можно:

а) преобразовав к виду $\int \sqrt{\cos x}dx \cdot \int \sin x dx$;

б) заменой $u = \cos x$; в) заменой $u = \sqrt{\cos x}$;

г) заменой $u = \sin x$.

7. Вычислить $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+4}dx$ можно:

а) преобразовав к виду $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx + \int \frac{\sqrt{x}}{4}dx$;

б) заменой $x = t^4$; в) заменой $x = t^2$; г) заменой $x = t^3$.

8. Интеграл $\int \cos 3x dx$ равен

а) $\dfrac{\cos^2 3x}{2} + c$; б) $3\sin 3x + c$; в) $\dfrac{1}{3}\sin 3x + c$; г) $-\dfrac{1}{3}\sin x + c$

9. Интеграл $\int xe^x dx$ можно найти:

а) преобразовав к виду $\int xdx \cdot \int e^x dx$;

б) преобразовав к виду $\int xdx + \int e^x dx$;

в) интегрируя по частям $u = x$, $dv = e^x dx$;

г) интегрируя по частям $u = e^x$, $dv = xdx$.

10. Интеграл $\int \dfrac{dx}{1 + 3\sin x}$ можно найти методом подстановки:

а) $u = \sin x$; б) $u = tgx$, тогда $\sin x = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$;

в) $u = 1 + 3\sin x$; г) $u = tg\dfrac{x}{2}$, тогда $\sin x = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 9.1. Найдите неопределенные интегралы:

а) $\int \left(5x + \sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{x^6}\right) dx$; д) $\int \left(\sin 5x - e^{-3x} + \dfrac{1}{\cos^2 4x}\right) dx$;

б) $\int \dfrac{3dx}{4 - 5x}$; е) $\int \dfrac{5dx}{16 + x^2}$;

в) $\dfrac{dx}{(3x+5)\ln^2(3x+5)}$; ж) $\int \dfrac{3x - 4}{25 - x^2} dx$;

г) $\int \dfrac{tg 5x}{\cos^2 5x} dx$.

Ответ:

а) $\frac{5}{2}x^2+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{1}{5x^5}+c$; д) $-\frac{1}{5}\cos 5x+\frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{1}{4}tg4x+c$;

б) $-\frac{3}{5}\ln|4-5x|+c$; е) $\frac{5}{4}arctg\frac{x}{4}+c$;

в) $-\frac{1}{3\ln(3x+5)}+c$; ж) $-\frac{3}{2}\ln|25-x^2|-\frac{2}{5}\ln\left|\frac{x+5}{x-5}\right|+c$;

г) $\frac{1}{10}tg^2 5x+c$.

Задача 9.2. Найти неопределенные интегралы, применив метод интегрирования по частям:

а) $\int(2x+5)\cos x dx$; б) $\int(2-5x)\cdot e^{-x}dx$;

в) $\int\ln(x-1)dx$; г) $\int arctg2xdx$.

Ответ: а) $(2x+5)\sin x+2\cos x+c$; б) $(5x+3)e^{-x}+c$;

в) $(x-1)\ln(x-1)-x+c$; г) $xarctg2x-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)+c$.

Задача 9.3. Найдите неопределенные интегралы, применив метод разложения на простейшие дроби:

а) $\int\frac{x^3}{x^3-1}dx$; б) $\int\frac{x+2}{(x-1)x^2}dx$.

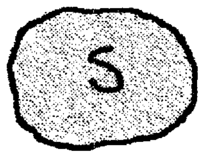
Ответ: а) $x+\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$;

б) $3\ln|x-1|-3\ln|x|+\frac{2}{x}+c$.

Глава VIII. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Введение

Интегралы имеет широкое применение в экономике, технике, сельском хозяйстве и других отраслях науки. Например, с помощью определенного интеграла можно найти площадь произвольной плоской фигуры, объем произвольного тела, длина криволинейной линии, пройденный путь в определенной времени неравномерно движищуюмся материальной точки(автомобиль, поезд, самолет и др) и так далее.



Поэтому дифференциальные и интегралные исчисления курса Высшей математики имеют важное значение.

8.1.1. Определение определенного интеграла

Пусть на отрезки $[a,b]$ $(b>a)$ задана непрерывная функция принимающая на этом отрезке неотрицательные значения: $f(x)\geq 0$ при $x\in[a,b]$.

Рассмотрим задачу вычислить площадь S трапеции $ABCD$, ограниченной снизу отрезком $[a,b]$, слева и с права прямыми $x=a$ и $x=b$, сверху функцией

$y=f(x)$, которое сведет к определению определенного интеграла.

Для решения этой задачи:

1) разобьём отрезок $[a,b]$ произвольным образом на n частей точки $x_0=a,x_1,x_2,...,x_n=b$; длину $i-$го отрезка обозначим Δx_i, где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$; $i=1,2,3,...,n$; максимальную из один отрезков обозначим λ; $\lambda=\max\limits_i \Delta x_i$.

2) на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i, и вычислим значение функции $f(x)$: $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$.

3) составим сумме

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

Сумма S_n называется интегральной суммой.

Определение 1 (Определение определенного интеграла)

Если существует (конечный) предел последовательности интегральных сумм S_n при $\lambda \to 0$ $(n \to \infty)$, не зависящей ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$, на части $[x_{i-1}, x_i]$, ни от выбора точек ξ_i, то функция $f(x)$ называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx$$

где $f(x)$ – подинтегральная функция, числа a и b – соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования.

Таким образом

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

Вывод. Если предел (2) существует, то функция $f(x)$ будет интегрируема на отрезке $[a,b]$.

Тепер сформулируем теорему о существованию определенного интеграла.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ либо имеет конечное число разрыв I-го тура на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема по этому отрезку.

8.1.2. Геометрический смысл определенного интеграла

Если $f(x)>0$ на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной снизу отрезком $[a,b]$, слева и справа прямыми $x=a$ и $x=b$, сверху графиком функции $f(x)$.

$$\text{Итак}\quad S=\int_a^b f(x)dx\,.$$

Приведем пример вычисление значения определенного интеграла по высшее приведенным определением определенного интеграла.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры ограниченными снизу с осью OX, слева и справа прямыми $x=0$ и $x=1$, сверху функцией $y=x^2$.

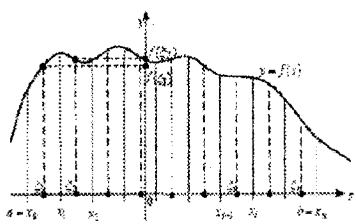
Решение. 1) разделим отрезок $[0,1]$ на n равных частей с точками $x_0=0, x_1=\dfrac{1}{n}, x_2=\dfrac{2}{n},\dots,x_{n-1}=\dfrac{n-1}{n}, x_n=\dfrac{n}{n}=1$

Длину $i-$го отрезка обозначим через Δx_i, где $\Delta x_i=\left[\dfrac{i+1}{n}-\dfrac{i}{n}\right]=\dfrac{1}{n}$

2) на каждом отрезке выберем точки ξ_i середину этот отрезок т.е

$$\xi_i=\frac{\frac{i}{n}+\frac{i+1}{n}}{2}=\frac{2i+1}{2n}\,,$$

$$i=\overline{1,n}$$



3) составим интегральную сумму

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2i+1}{2n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{2n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{3}{2n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\dots+\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=$$

$$=\frac{1}{4n^2}\cdot\frac{1}{n}[1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2]=\frac{1}{4n^3}\cdot\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}=\frac{(1+\frac{1}{2n})(1-\frac{1}{2n})}{3}$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{3}$$

8.1.3. Физический приложения определенного интеграла Статические моменты и моменты инерции плоских дуг и фигур

Пусть на плоскости XOY задана система материальных точек $A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),...,A_n(x_n,y_n)$ с массами $m_1,m_2,...,m_n$. *Статическим моментом* M_x этой системы относительно оси Ox называется сумма произведений масс этих точек на их ординаты: $M_x=\sum_{k=1}^{i}m_k y_k$. Аналогично (как сумма произведений масс точек на их абсциссы) определяется статический момент системы оси Oy: $M_y=\sum_{k=1}^{i}m_k x_k$.

Моментами инерции I_x, и I_y системы относительно осей Ox и Oy называются суммы произведений масс точек на квадраты их расстояний от соответстующей оси. Таким образом, $I_x=M_x=\sum_{k=1}^{i}m_k {y_k}^2$; $I_y=M_y=\sum_{k=1}^{i}m_k {x_k}^2$.

За статические моменты и моменты инерции плоских дуг и фигур принимаются соответствующие моменты условных масс, равномерно распределенных вдоль этих дуг и фигур с плотностью, равной единице. Статические моменты и моменты инерции дуги плоской кривой $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ вычисляются по формулам: $M_x=\frac{1}{2}\int_a^b ydL,$ $M_y=\frac{1}{2}\int_a^b xdL,$

$I_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2dL,$ $I_y=\frac{1}{2}\int_a^b x^2dL,$ где $dL=\sqrt{1+(y')^2}dx$ – дифференциал дуги кривой.

Статические моменты и моменты инерции криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляются по формулам:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b ydS = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx, \ \ M_y = \frac{1}{2}\int_a^b xdS = \frac{1}{2}\int_a^b xydx,$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b y^3 dL, \ \ I_y = \frac{1}{2}\int_a^b x^2 dS = \frac{1}{2}\int_a^b x^2 ydy.$$

В этих формулах $dS = ydx$ – дифференциал площади криволинейной трапеции.

Пусть материольная точка M движется прямолинейно со скоростью $v = v(t)$, t – время. Найти пройденный его путь за промежуток времени $a \le t \le b$. Предпологая, что траекторией точки является ось OX и $S = S(t)$ есть уравнение движения, будем иметь

$$V(t) = \frac{dS}{dt} \Rightarrow dS = v(t)dt$$

Интегрируя последное равенство в пределах от $t = a$ до $t = b$, получим путь пройденныйточкой M за промежутокь времени $[a,b]$: $\int_a^b ds = \int_a^b v(t)dt \Rightarrow$

$$S = S(b) - S(a) = \int_a^b v(t)dt \qquad (4)$$

Пример 3. На какую высоту за 10 сек поднимается ракета, брошенная вертикально вверх, если ее скорость (км/с) меняется по закону

$$v = V(t) = 2 + \frac{1}{(t+1)^2}.$$

Чему равна средняя скорость полета ракеты за этот промежуток времени?

Решение. Путь, пройденной ракетой за 10 сек, согласно формулу (4) равен

$$S=\int_0^{10}\left[2+\frac{1}{(1+t)^2}\right]dt=\left(2t-\frac{1}{1+t}\right)\Big|_0^{10}=(20-\frac{1}{11})-(0-1)=21-\frac{1}{11}\approx 20{,}9\text{км}$$

$$v_{cp}=\frac{s}{t}=\frac{20{,}9\text{км}}{10c}=2{,}09\text{км}/c$$

8.1.4. Свойства определенного интеграла

1°. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если $A=const$, то

$$\int_a^b Af(x)dx=A\int_a^b f(x)dx$$

2°.Определенный интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен сумме их интегралов, т.е.

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

3°. Если $a<c<b$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

4°. Если функция $f(x)\ge 0$ на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx\ge 0$

5°. Если $f(x)\ge g(x)$ для всех $x\in[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$$

6°. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, где $a<b$, то

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

7°. Теорема о среднем.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует точка $c\in[a,b]$ такая,что

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$$

8.1.5. Вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а $F(x)$ является какое-либо ее первообразной на этом интервале, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

Эта формула называется формулой Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\arcsin x \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} = 2\left(\arcsin 1 - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Методы вычисления определенного интеграла. Геометрические приложения определенного интеграла.

8.2.1. Методы вычисления определенного интеграла

А) Вычисление определенного интеграла методом подстановки имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть : 1) Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) функция $x=\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha,\beta]$;

3) множеством значений функций $x=\varphi(t)$ является отрезок $[a,b]$;

4) $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$. Тогда справедлива формула

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – какая либо первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

Рассмотрим на отрезке $[\alpha, \beta]$ сложную функцию $F(\varphi(t))$. Так как $[F(\varphi(t))] = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, то $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, которая непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Согласно формуле Ньютона-Лкйбница имеем

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta) - F(\varphi(\alpha)) \qquad (3)$$

Формула (3) называется формулой методом подстановки (или замена переменной) в определенном интеграле.

Пример 1. Вычислить $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}dx$

Решение: Положим $1-\cos x = t$, тогда $\sin x dx = dt$. $\alpha = 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1$, $\beta = 1 - \cos(\pi) = -1 - (-1) = -2$.

Следовательно,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}dx = 2\int_1^2 \frac{dt}{t^2} = 2\int_1^2 t^{-2}dt = -\frac{2}{t}\Big|_1^2 = -\left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) = -(1-2) = 1$$

В) Вычисление определенного интеграла методом интегрирования по частям

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$.

Нам известно, что

$$d(uv) = udv + vdu \qquad (4)$$

в пределах от a до b, получим

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu \qquad (5)$$

Поскольку по формуле Ньютон-Лейбница имеем

$\int_a^b duv = uv\Big|_a^b$. Тогда из (5) следует, что

$$\int_a^b udv = uv - \int_a^b vdu \qquad (6)$$

Эта формула называется формулой *интегрирования по частям* для определенного интеграла

Пример 2. Вычислить $\int_0^1 xe^{2x}dx$.

Решение. Положим $u = x$ $dv = e^{2x}dx$, тогда $du = dx$ $v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x) = \frac{1}{2}e^{2x}$.

Следовательно,

$$\int_0^1 xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{4}\int_0^1 e^{2x}d(2x) =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 == \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}\left(e^2 - e^0\right) = \frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right)$$

8.2.2. Геометрические приложения определенного интеграла

А) Вычисление площадей плоских фигур.

При вычислении площадей плоских фигур с применением определенного интеграла возможны следующие случаи.

1. Фигура ограничена графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$ и $x = b$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, прямыми $x = -2, x = 3$ и осью абсцисс.

Решение. $f(x)=x^2, a=-1, b=2$ то согласно формулу (1) имеем:

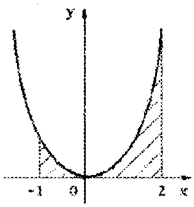
$$S=\int_{-1}^{2}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}=\left[\frac{2^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right]=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=\frac{9}{3}=3$$

Фигура ограничена графиками двух непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$ где $(f(x)\geq g(x))$ и $a\leq x\leq b$. В этом случае искомая площадь S вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx \qquad (4)$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x$ и $-(y-1)=(x-1)^2$.

Решение: Найдем точки пересечение параболы и прямой т.е. решим систему



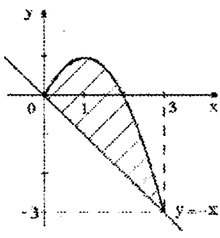
уравнений $\begin{cases} y=2x-x^2 \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases} \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=-3, \end{cases}$

Выполним чертеж к задаче:

Вычислим площадь сегмента при

$f(x)=-x \quad g(x)=2x-x^2$, если $a=0, b=3$

$$S=\int_0^3\left(2x-x^2-(-x)\right)dx=\int_0^3\left(3x-x^2\right)dx=\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\Big|_0^3=\frac{9}{2}=4{,}5$$



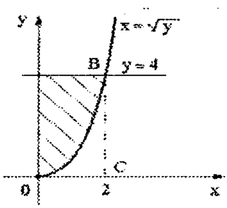
2.Если криволинейная трапеция ограничена кривой $x=\varphi(y)$, прямыми $y=c$, $y=d$ и отрезком $[c,d]$ оси Oy. Тогда площадь этой трапеции вычисляется по формуле $S=\int_c^d\varphi(y)dy$.

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x=\sqrt{y}$, $x=0, y=4$

Решение. Из чертежа видно, что искомая площадь S криволинейного треугольника OAB равна разности двух площадей: $S = S_{OABC} - S_{OBC}$, каждая из которых находится по геометрическому смыслу определенного интеграла. Решая систему $\begin{cases} x = \sqrt{y} \\ y = 4 \end{cases}$, получаем, что точка B пересечения прямой $y = 4$ и $x = \sqrt{y}$ имеет координаты (2;4). Тогда

$$S_{OABC} = \int_0^2 4dx = 4\int_0^2 dx = 4x\Big|_0^2 = 8$$

$$S_{OBC} = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$



Окончательно $S = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной в параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, y(t) \geq 0, t \in [t_1; t_2]$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a,b]$ осьи Ox, то ее площадь вычисляется по формуле $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$, t_1 и t_2 определяются из равенства $a = x(t_1), b = x(t_2)$.

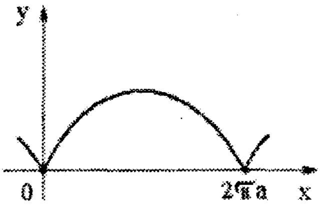
Пример 4. Вычислить площадь фигуры ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ и осью Ox.

Решение. Арка циклоиды описывается при изменение t в пределах от 0 до 2π, так как $y(0) = y(2\pi) = 0$, а в остальных точках указанного промежутка. Пределы интегрирования соответственно равны $x(0) = 0$ и $x(2\pi) = 2\pi a$. Сделаем подстановку: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $dx = a(1 - \cos t)dt$. При изменении x на отрезке $[0, 2\pi a]$ t изменяется от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi$. Поэтому

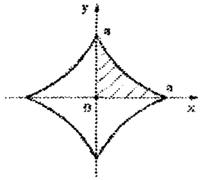
$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = a^2\left(\frac{3}{2}\cdot 2\pi - 2\sin 2\pi + \frac{1}{4}\sin 4\pi - 0\right) = 3\pi a^2$$

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$.



Решение. Так как фигура симметрична относительно осей координат Ox и Oy, то можно вычислить четверть искомой площади S_1. Для $S_1 : x_1 = 0$, или $a\cos^3 t = 0$, т.е. $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$; $x_2 = a$, или $a\cos^3 t = a$, т.е. $t_2 = 0$; Четверть искомой площади:



$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t)dt = -3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot\cos^2 t dt =$$

$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot(1-\sin^2 t)dt = 3a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\cdot dt\right) = \frac{3}{32}\pi a^2.$$

Таким образом, площадь фигуры $S = 4S_1 = \dfrac{3}{8}\pi a^2$.

Площадь криволинейного сектора в полярных координатах.

8.3.1. Полярная система координат

Положение точки на плоскости можно определить с помощью так называемой полярной системы координат.

На плоскости выбираем некоторую точку O, называемой полюсом, и выходящую из этой точки полупрямую, называемую полярной осью.

$$\rho = |ON|, \varphi = \angle XON$$

Положение точки M на плоскости можно определить двумя числами ρ и φ. Числа ρ и φ называется полярными координатами точки N, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\rho \ge 0$.

Связ между полярными и прямоугольными декартовыми координатами имеет вид:

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Пример 1. Уравнение $\rho = a$, где $a = const$, определяет в полярных координатах окружность с центром полюсе и радиусом a.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = a \quad \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2.$$

Уравнение $\rho = F(\varphi)$ в полярной системе координат определяет некоторую линию.

8.3.2. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

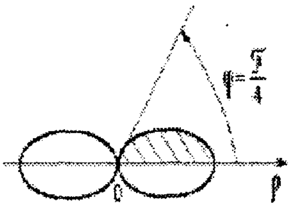
Пусть в полярной системе координат имеем кривую, заданную уравнением $\rho = f(\theta)$, где $f(\theta)-$непрерывная функция при $\alpha \le \theta \le \beta$.

Требуется определить площадь сектора OAB, ограниченного кривой $\rho = f(\theta)$ и радиус векторами $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$.

Разобъем данную область радиус векторами $\alpha = \theta_0, \theta = \theta_1, \theta = \theta_2, ..., \theta_n = \beta$, на n частей.

Обозначим через $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, ..., \Delta\theta_n$ углы между проведенными радиус векторами.

Обозначим через $\overline{\rho_i}$ длину радиус-вектора, соответствующего какому-нибудь углу $\overline{\theta_i}$, заключенному между θ_i и θ_{i+1}.



Рассмотрим круговой сектор с радиусом $\overline{\rho_i}$ и центральным углом $\Delta\theta_i$. Площадь этого сектора будет равна $\Delta S_i = \frac{1}{2}\overline{\rho_i}^2 \cdot \Delta\theta_i$.

Сумма

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\overline{\rho}_i^2 \cdot \Delta\theta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[f(\overline{\theta}_i)\right]^2 \cdot \Delta\theta_i$$

будеть равна площадь “ступенчатого ” сектора. Так как эта сумма является интегральной суммой для функции $\rho^2 = \left[f(\overline{\theta})\right]^2$ на отрезке $\alpha \le \theta \le \beta$, то ее предел при $\max\Delta\theta_i \to 0$ есть определенный интеграл $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta$ таким образом, площадь сектора OAB равна

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\theta)d\theta \tag{1}$$

или

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(\theta)\right]^2 d\theta \tag{1'}$$

Пример 1. Вычислить площадь, ограниченной лемнискатой $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$.

Решение: Находим четверть частью искомой площадью

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta =$$

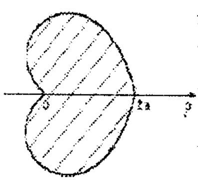
$$= \frac{1}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d(2\theta) = = \frac{a^2}{4}\sin 2\theta\Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}.$$

Итак, площадь фигуры, ограниченной лемнискатой, будет равна $S = a^2$.

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1+\cos\varphi)$. **Решение.** В силу симметричности данной фигуры относительно оси достаточно вычислить площадь верхней половины

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= a^2\left(\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2$$



8.3.3. Вычисление длина дуги кривой

Пусть в прямоугольных координатах на плоскости дана кривая уравнением $y = f(x)$ Требуется найти длину $\breve{AB}$ этой кривой, заключенной между вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$. Для этого:

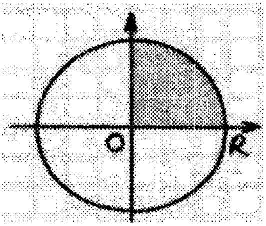
1) Возьмем на дуге AB точки $A, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$ с абциссами

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n = b.$$

2) Проведем хорды $AM_1, M_1M_2, \ldots, M_iM_{i+1}, \ldots M_{n-1}B$, длины которых обозначим соответственно через $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$.

Тогда получим ломанную $AM_1M_2...M_nB$, вписанную в дугу $\overset{\smile}{AB}$. Длина ломанной равна $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$

Длина S дуги AB называется предел



$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \tag{1}$$

где

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

$$\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

По теореме Лагранжа имеем

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(\xi_i),$$

где $x_i < \xi_i < x_{i+1}$.

Следовательно, $\Delta S_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$.

Таким образом, длина вписанной ломанной рана

$$\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

Если на отрезке $a \le x \le b$ функция $f(x)$ и ее производная непрерывна, то существует предел

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \tag{2}$$

Итак, получили формулу для вычисления длины дуги:

$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Пример 1. Определить длину окружности $x^2 + y^2 = R^2$

Решение: Вычислим сначала длину четвертой части окружности, лежащей в первом квадранте. Тогда уравнение дуги $y=\sqrt{R^2-x^2}$ откуда $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$.

$$\frac{1}{4}S=\int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R=\frac{\pi}{2}R$$

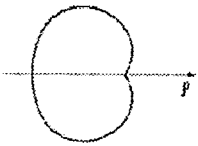
Тогда длина всей окружности $S=4\frac{\pi}{2}R=2\pi R$

1. Если уравнение кривой задано в параметрическом форме :

$$x=g(t),\ \ y=\varphi(t)\ \ (\alpha\le t\le\beta)$$

то длина дуги кривой определяется по формуле

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[g'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2}dt \qquad (4)$$



Пример 2. Вычислить длину одной арки циклоиды $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ при $0\le t\le 2\pi$

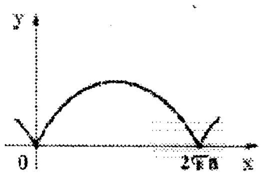
Решение. Так как $x_t'=a(1-\cos t),\ y_t'=a\sin t$, то

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t)}dt=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a$$

Длина дуги кривой в полярных координатах

Пусть в полярных координатах задано уравнение кривой $\rho=f(\theta)$, где $\rho-$полярный радиус, $\theta-$полярный угол.



В этом случае длина дуги определяется по формуле

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\rho')^2+(\rho)^2}d\theta \qquad (5)$$

Пример 3. Вычислить длину кардиоиды $\rho=2(1-\cos\varphi)$ при $a=0$, $b=2\pi$ Так как кардиоида симметричны относительно оси Ox, то $l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi.$

При $\rho' = 2\sin\varphi$, $(\rho')^2 = 4\sin^2\varphi$.

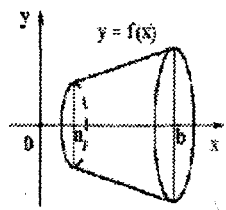
$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{4\sin^2\varphi + 4(1-\cos\varphi)^2}\, d\varphi = 4\int_0^{\pi} 2\sqrt{(1-\cos\varphi)} =$$

$$= 8\int_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2} d\varphi = 16\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 16.$$

Вычисление объема и площадь поверхности тела

8.4.1. Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений

Пусть дано некоторое тело T. Предположим, что известно любого сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox.



Эта площадь будет зависить от положения секущей плоскости, т.е. будет функцией от x и её обозначим через $S(x)$. Преположим, что $S(x)$ есть непрерывная функция от x. Требуется найти объем этого тело. Для этого:

1) Проведем плоскости $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2, \ldots$, $x = x_n = b$. Эти плоскости разобьют тело на слои.

2) В каждом частичном промежутке $x_{i-1} \le x \le x_i$ выберем произвольную точку ξ_i и вычислим площадь сечения $S(\xi_i)$. $(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$.

3) Таким образом, исходное тело разбываются на несколько элементарных цилиндрических тел с площадью основания $S(\xi_i)$ и высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Объем таких тел будет равна $S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.

Тогда объем всех этих цилиндрических тел будет $V_n = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\cdot \Delta x_i$. Предел этой суммы при $\max \Delta x_i \to 0$ называется объемом данного тела:

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\cdot \Delta x_i = \int_a^b S(x)dx \qquad (1)$$

8.4.2. Объем тела вращения

Рассмотрим тело образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$. В этом случае произвольное сечение тело плоскостью перпендикулярной к оси Ox, есть круг, площадь которого равна

$$S(x) = \pi \cdot y^2 = \pi \cdot [f(x)]^2.$$

Тогда по формулу (1) получим объема тела врашения

$$V = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx. \qquad (2)$$

Если тело образуется при вращении вокруг оси Oy криволинейной трапеции ограниченной кривой $x = \varphi(y)$ $(\varphi(y) \geq 0)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$, $c \leq y \leq d$ то объем тела вращения равен $V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$ или $V_y = 2\pi \int_a^b xydx$.

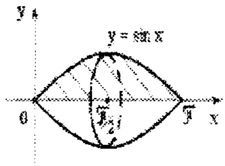
Пример 1. Найти объем тела образованного вращением вокруг оси Ох одной полуволны синусоиды $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$

Решение.

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx =$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} dx - \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \cos 2x dx = \frac{\pi}{2} x \Big|_0^{\pi} - \frac{\pi}{4}\sin 2x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Пример 2. Найти объем тела образованного враще-нием вокруг оси Oy и прямой $y=1$.



Решение.

$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_0^\pi y dy = \pi\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

8.4.3. Площадь поверхности тела вращени

Пусть нам дана поверхность, образованного вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси Ox. Определим площадь этой поверхности на участке $a \le x \le b$. Предположим. что функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную во всех точках $[a,b]$. Для этого:

1) На дуге $\overset{\smile}{AB}$ возмьем точки A, N_1, $N_2, \ldots,$ N_i, $N_{i+1},\ldots,N_n = B$ абциссами x_0, $x_1,\ldots$, x_i, $x_{i+1},\ldots,x_n = b$

Проведем хорды AN_1, $N_1N_2,\ldots,N_iN_{i+1},\ldots,N_{n-1}B$, длины которых обозначим $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$.

Каждая хорда длины ΔS_i при вращении опишет усеченный конус, с радиусами $r = y_1$ $R = y_{i+1}$ и образующему $l = \Delta s_i$. Площадь поверхности этого элементарного усеченного конуса будет равна

$$\Delta p_i = 2\pi\cdot\frac{y_i + y_{i+1}}{2}\Delta s_i = \pi(R+r)\cdot l$$

но $$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\cdot\Delta x_i$$

Применяя теорему Лагранжа, имеем

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(\xi_i), \text{ где } x_i \le \xi_i \le x_{i+1},$$

следовательно, $\Delta s_i = \sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\cdot\Delta x_i$

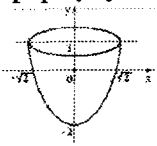
Тогда площадь поверхности, описанной ломанной, будет равна

$$P_n = 2\pi\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i + y_{i+1}}{2}\cdot\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\cdot\Delta x_i = \pi\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{i+1}) + f(x_i)\right]\cdot\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\cdot\Delta x_i \quad (1)$$

Переходим пределу когда $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \cdot \sum_{i=1}^{n} 2 f(\xi_i) \cdot \sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2} \cdot \Delta x_i = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\, dx \qquad (2)$$

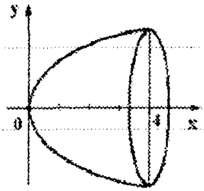
Итак, площадь поверхности тела вращения вычисляется по формулу



$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\, dx \qquad (3)$$

Пример 3. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги параболы $y^2 = 2x, x \in [0,4]$ вокруг оси Ox.

Решение. Выразим из уравнения параболы y; $y = \sqrt{2x}.$



Найдем $y'; y' = \sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$. Для нахождения площади поверхности воспользуемся формулой (3)

$$S_x = 2\pi \int_0^4 \sqrt{2x} \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{2x} \sqrt{1+\frac{1}{2x}}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^4 \sqrt{2x+1}\, dx = 2\pi \frac{1}{2} \int_0^4 (2x+1)^{\frac{1}{2}} d(2x+1) = \pi \left(\frac{2(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \right)\Bigg|_0^4 = \frac{2\pi}{3}(27-1) = \frac{52}{3}\pi.$$

Если дуга кривой, заданная функций $x = \varphi(y), c \le y \le d$, вращается вокруг ос Оу, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S_y = 2\pi \int_c^d x \cdot \sqrt{1+\left(x'\right)^2}\, dy, \qquad (4)$$

где c и d -ординаты начала и конца дуги.

Пример 4. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $x^2 = y+2$, $y=1$ вокруг оси Ox.

Решение. Воспользуемся формулой (4). Получим

$$x = \sqrt{y+2}, \quad x' = \frac{1}{2\sqrt{y+2}}$$

$$\sqrt{1+\left(x'\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{y+2}}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{4(y+2)}\right)}=\sqrt{\left(\frac{4y+9}{4(y+2)}\right)}=$$

$$=2\pi\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{1}\sqrt{4y+9}\,dy=\frac{\pi}{4}\int\limits_{-2}^{1}(4y+9)^{\frac{1}{2}}d(4y+9)=\frac{\pi}{4}\frac{2(4y+9)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{\pi}{6}(13\sqrt{13}-1).$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл.
2. Свойства определенного интеграла.
3. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Замена переменной и формула интегрирования по частям в определеном интеграле.
5. Геометрические приложения определенного интеграла.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

1. Определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ это:

   а) $F(x)+c$, где $F'(x)=f(x)$, $c-const$;

   б) $F(a)-F(b)$, где $F'(x)=f(x)$;

   в) $F(b)-F(a)$, где $F'(x)=f(x)$;

   г) $F(a)+F(b)$, где $F'(x)=f(x)$.

2. Если $f(x)\ge 0$ на $[a,b]$, то:

   а) $\int\limits_a^b f(x)dx\ge 0$; б) $\int\limits_a^b f(x)dx\le 0$; в) $\int\limits_a^b f(x)dx=0$;

   г) $\int\limits_a^b f(x)dx$ принимает произвольное значение.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 10.1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^2 \left(5+x^2\right)dx$, б) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{7}} \frac{x\,dx}{\sqrt{2+x^2}}$,

в) $\int\limits_0^1 x \cdot e^{x^2} dx$; г) $\int\limits_2^7 \frac{dx}{5+\sqrt{x+2}}$;

д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$; е) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 2x\,dx$;

ж) $\int\limits_2^3 \frac{x^2+1}{x^3-x}dx$, з) $\int\limits_3^5 \frac{x^2+5}{x-2}dx$,

и) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2+6x+10}$, к) $\int\limits_{-1}^0 xe^{-x}dx$

Ответ: а) $\frac{22}{3}$; б) 1; в) $\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$; г) $2-10\ln\frac{8}{7}$; д) $\frac{\pi}{4}$;

е) $\frac{1}{3}$; ж) $\ln\frac{16}{9}$; з) $12+9\ln 3$ и) $arctg 0.08$ к) -1.

Задача 10.2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

а) $y=x^2$ и $y=2x$; б) $y=5x-x^2$ и $y=x$;

в) $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=3$; г) $y=x^2-6$ и $y=-x^2+5x-6$.

Ответ: а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{32}{3}$; в) $\ln 3$; г) $5\frac{5}{24}$.

Задача 10.3. Найдите длину дуги кривой $y=\ln\sin x$ от $x_1=\frac{\pi}{3}$ до $x_2=\frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $2\ln\sqrt{3}$.

Задача 10.4. Вычислите объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^3$, $x=0$, $y=8$ вокруг оси Ox;

б) $y^2=16-x$, $x=0$ вокруг оси Oy;

в) $y=2\sin x$, $0\le x\le\pi$ вокруг оси Ox;

г) $y=2x-x^2$, $y=-x+2$ вокруг оси Ox.

Несобственные интегралы

8.5.1. Интегралы с бесконечными пределами

При определении определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

предпологалось, что :

1) Промежуток интегрирования $[a,b]$ конечен;

2) Подынтегральная функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Такой определенный интеграл называется собственным (слово собственный обычно опускается).

Если нарушается по меньшей мере одно из двух условий: 1) или 2), то символ (1) будем называть несобственным определенным интегралом. Выясним смысл этого нового понятия для двух простейших случаев.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a < x < +\infty$.

Рассмотрим интеграл $I(b) = \int_a^b f(x)dx.$

Этот интеграл имеет смысл при любом $b > a$. При изменении в интеграл изменяется, он является непрерывной функцией b. Рассмотрим поведении этого интеграла при $b \to \infty$

Определение. Если существует конечный предел $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx,$ то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на интервале $[a,+\infty)$ и обозначают так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

Если предел (2) существует, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся, в противном случае она называется расходящимся.

Геометрический смысл, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ выражает площадь неограниченной (бесконечной) области, заключенной между линиями $y = f(x), x = a$ и осью OX.

Пусть $F(x)$ − первообразная функция для подынтегральной функции $f(x)$. На основании формулы (2) имеем

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty}[F(b) - F(a)].$$

Если ввести условное обозначение

$$F(+\infty) = \lim_{b \to +\infty} F(b),$$

то получим для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования обобщенную формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = [F(+\infty) - F(a)]. \tag{3}$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b \to +\infty} arctgx |_0^b = \lim_{b \to +\infty}[arctgb - arctg0] = arctg\infty - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогичным образом определяются несобственные интегралы вида:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b f(x)dx$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$

Решение. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$

Нам известно, что второй интеграл равен $\frac{\pi}{2}$. Вычислим первый интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{a\to-\infty}arctgx\,|_a^0=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}[arctg0-arctg(-\infty)]=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Итак, $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Во многих случаях бывает достаточно установить, сходится или рассходится, данный интеграл и оценить его значение. Для этого могут быт полезными следующие теоремы, которые мы приведем без доказательство, а применение их докажем на примерах.

Теорема 1. Если для всех x $(x\geq a)$ выполняется неравенство $0\leq f(x)\leq\varphi(x)$ и если $\int\limits_{a}^{\infty}\varphi(x)dx$ сходится, то $\int\limits_{a}^{\infty}f(x)dx$ также сходится, при этом

$$\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx\leq\int\limits_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx$$

Пример 3. Исследовать сходится ли интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+e^x)}dx$

Решение: Заметим, что $1\leq\frac{1}{x^2(1+e^x)}\leq\frac{1}{x^2}$. Далее,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 1$$

Следовательно, исходный интеграл сходится и его значение меньше 1.

Теорема 2. Если для всех x $(x \geq a)$ выполняется неравенство $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, причем $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ рассходится, то рассходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$

Пример 4. Исследовать, сходится ли интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$

Решение. Заметим, что $\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} > \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\,\Big|_1^{\infty} = +\infty.$

Следовательно, расходится и данный интеграл.

Если функция $f(x)$ меняет знак в бесконечном интервале, то имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$

В этом случае последний интеграл называется абсолютно сходящимся.

Пример 5. Иследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}dx.$

Решение. Замечаем, что $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right|.$

Но $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{\infty}=\frac{1}{2}$. Итак, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^3}\right|dx$ сходится. Отсюда следует, то сходится и данный интеграл.

8.5.2. Интегралы от разрывной функции

А) Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a\le x\le b$ и имеет точку разрыва при $x=b$. Тогда соотиетствующий несобственный интеграл от разрывной функции определяется формулой

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_a^{b-\varepsilon}f(x)dx\right] \tag{4}$$

В) Если функция $f(x)$ имеет разрыв в левом конце отрезка $[a,b]$ (т.е. при $x=a$) то

$$\int\limits_a^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx\right] \tag{5}$$

С) Если функция $f(x)$ имеет разрыв в некоторой точке $x=c$ где $a\le c\le b$, то

$$\int\limits_a^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon}^{b}f(x)dx \tag{6}$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ функция терпит разрыв в точке $x=1$.

Решение. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-\lim_{\varepsilon\to 0}2\left[\sqrt{1-(1-\varepsilon)}-1\right]=2$

Для определения сходимости несобственных интегралов от разрывных функций и оценки их значений могут быт применемы теоремы, анологичные теоремы для оценки интегралов с бесконечными пределами.

Теорема 1' Если на отрезки $[a,b]$ $f(x)$ и $\varphi(x)$ разрывны в точке b, причем во всех точках этого отрезка выполнены неравенства $\varphi(x) \geq f(x) \geq 0$, и $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ сходится, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ также сходится.

Теорема 2'. В условиях теоремы 1' выполнены неравенство $f(x) \geq \varphi(x) \geq 0$, и $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ расходится, то и $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие несобственного интеграла с бесконечными пределами.
2. Понятие несобственного интеграла от неограниченной функции
3. Понятие сходимости, расходимости несобственного интеграла.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

1. Интеграл вида $\int\limits_1^{\infty} \frac{2}{x} dx$ является

   а) неопределённым, б) определённым,
   в) несобственным I рода; г) несобственным II рода

2. Какой из интегралов является несобственным интегралом I рода:

   а) $\int\limits_a^b f(x)dx$; б) $\int f(x)dx \leq 0$; в) $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$; г) $\int\limits_a^x f(t)dt$.

3. Какой из интегралов является несобственным интегралом II ро да:

   а) $\int\limits_1^5 x^2 dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$; в) $\int\limits_2^4 \sqrt{x-2}dx$; г) $\int\limits_3^5 \frac{dx}{x+2}$.

4. Значение несобственного интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ равно:

   а) -1; б) $+\infty$; в) 1; г) $-\infty$.

5. Значение несобственного интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ равно:

а) 2;   б) -2;   в) $+\infty$;   г) $-\infty$.

6. Несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ при $\alpha > 1$ есть величина:

а) конечная;   б) бесконечная;   в) отрицательная;   г) равная 0.

7. Несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ при $\alpha \le 1$ есть величина:

а) конечная;   б) бесконечная;   в) отрицательная;   г) равная 0.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 11.1. Вычислите несобственные интегралы I рода или установите их расходимость:

а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x+2)\ln^2(x+2)}$;   б) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$;

в) $\int\limits_{-\infty}^{0}xe^{x}dx$;   г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+12}$.

Ответ: а) $\frac{1}{\ln 2}$;   б) ∞;   в) -1;   г) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Задача 11.2. Вычислите несобственные интегралы II рода или установите их расходимость: а) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;   б) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

Ответ: а) 2;   б) ∞

Глава IX. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

9.1.1. Определение функции нескольких переменных

Введение

На практике приходится решить технические, экономические, сельскохозяйственные и другие задачи связанные с функциями многих переменных. Рассмотрим некоторые из них:

Задача 1. Годовые рассходы предприятия могут быть выражены функцией

$$z = f(x, y) = a + b_1 x + b_2 y + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{y}$$

где a, b_1, b_2, c_1, c_2 - постоянные.

При каких значениях x и y рассходы предпреятия будут наименьшими?

Задача 2. Стоимость постройки $1 м^2$ фасада равна a, других стен- b, крышки- c . Определить, при каких соотношениях длины по фасаду x, ширина y и высоты z, при данной кубатуре V, общая стоимость всех стен и крышки (вместе с верхним перекрытием) здания, описываемой формулой

$$S(x, y) = a\frac{V}{y} + b\frac{V}{y} + 2b\frac{V}{x} + cxy,$$

будет наименьшей.

Задача 3. Надо строит с заданном объеме V силосохранилище чтобы затраты была минимальной для этой стройки, каково дольжна быть размеры этого сооружения

$$S(x, y) = xy + 2xz + 2yz, \ \ V = xyz$$

$$S(x, y) = xy + 2V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

Геометрическое изображение функции двух переменных

Мы до сих пор имели дело с функциями одной переменной. Однако на практике приходится иметь дело с функциями двух и более независимых переменных. Например урожайность получаемых из сельскохозяйственных культур зависить от нескольких факторов (удобрение, погоды, качества семена, обработки культивацию и другие).

Для наглядности приведем несколько примеров.

Пример 1. Площадь прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y, выражается формулой $S = x \cdot y$. Каждой паре значений x и y соответствует определенное значение площади S; S есть функция двух переменных.

Пример 2. Объем V есть функция трех переменных x, y, z, выражается фомулой $V = xyz$.

Здесь V есть функция трех переменных x, y, z.

Пример 3. Функция $u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ есть функция четырех переменных x, y, z, t.

Определение 1. Если каждой паре (x, y) значений двух независымых друг от друга переменных величин x и y из некоторой их изменения D, соответствует определенное значение величины z, то мы говорим, что z есть функция двух независимых переменных x и y, определенная в D.

Символически функция двух переменных обозначается так: $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$ и т.д.

Определение 2. Совокупность пар (x, y) значений x и y, при которых определяется функция $z = f(x, y)$, называется областью определения или областью существования этой функции и ее обозначается через D.

Пример 4. Определить область определения функции $z = 2x + y$. Эта функция имеет смысл при любых значениях x и y. $D = \{(x, y), x \in R, y \in R\}$

Следовательно, естественно областью определения этой функции является вся плоскость Oxy.

Пример 5. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$ $D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$

Нетрудно заметить, что областью определения функции двух переменных $z = f(x, y)$ является, часть плоскости Oxy или вся плоскость Oxy.

9.1.2. Геометрическое изображение функции двух переменных

Рассмотрим функцию $z=f(x,y)$ (1) определенную в области D на плоскости Oxy и систему прямоугольных декартовых координат $Oxyz$. В каждой точке $M(x,y)$ поставим перпендикуляр к плоскости Oxy и на нем отложим отрезок, равный $f(x,y)$.

Геометрическое место точек P, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), называется графиком функции двух переменных. В пространстве график функцию $z=f(x,y)$ определяет некоторую поверхность.

Например, графиком функции $z=x^2+y^2$ является параболоид вращения

9.1.3. Частное и полное приращение функции двух переменных

Предположим, что y функции $z=f(x,y)$, $y=const$. Если x дадим приращение Δx, тогда z получит приращение которое называют частным приращением z по x и обозначают через $\Delta_x z$, так что

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x)-f(x,y) \qquad (1)$$

Аналогично, если x сохраняет постоянное значение, а y получает приращение Δy, то z получает приращения, называемое частным приращением z по y. Это приращение обозначают символом $\Delta_y z$:

$$\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y) \qquad (2)$$

Если оба переменные x и y получает приращение Δx и Δy соответственно, то z также получит приращение Δz,

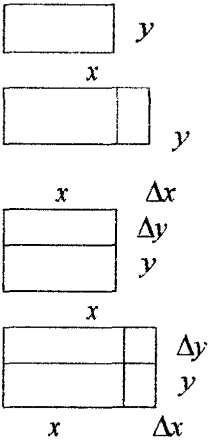
$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y) \qquad (3)$$

Δz называется полным приращением функции $z=f(x,y)$.

Необходимо отметить, что вообще говоря $\Delta z\neq\Delta_x z+\Delta_y z$.

Пример. Дано функции $z=f(x,y)=xy$. Найти $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ и Δz.

Решение:



1) $\Delta_x z = (x+\Delta x)\cdot y - xy = y\Delta x;$

2) $\Delta_y z = x\cdot(y+\Delta y) - xy = x\Delta y;$

3) $\Delta z = (x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y) - xy = xy + x\Delta y +$
$+ y\Delta x + \Delta x\Delta y - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$

При $x=2,\ \ y=1,\ \ \Delta x = 0{,}3,\ \ \Delta y = 0{,}2$ имеем

$$\Delta_x z = y\cdot\Delta x = 1\cdot 0{,}3 = 0{,}3;\quad \Delta_y z = x\cdot\Delta y = 2\cdot 0{,}2 = 0{,}4;$$

$$\Delta z = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y = 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}06 = 0{,}76$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = (x+\Delta x)+(y+\Delta y) = 2{,}3\cdot 1{,}2 = 2{,}76$$

9.1.4. Непрерывность функции двух переменных

Введем одно важное понятие окрестности данной точки. Окрестностью радиуса r точки $M_0(x_0, y_0)$ называется совокупность всех (x, y), удовлетворяющих неравенсту $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r,$ т.е. совокупность всех точек, лежаших внутри круга радиса r с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Сначала рассмотрим понятие предела функции двух переменных

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, определенная на G плоскости Oxy, и $M_o(x_o, y_0) \in G$.

Определение 1. Число A называется пределом функции $f(x,y)$ при стремлении точки $M(x,y)$ к точки $M_o(x_o, y_0)$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для всех точек для $M(x,y)$, что для которых выполняется неравенство $\overline{MM_0} < r$, имеет место неравенство $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

Если число A является пределом функции $f(x,y)$ при $M(x,y) \to M_0(x_0,y_0)$, то пишут $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \left(\frac{\sin 2xy}{3xy} \right) = \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{\sin 2xy}{3xy} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{6x} = \frac{4}{6} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = \frac{4}{6} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Определение 2. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции f(x,y). Функция f(x,y) называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если имеет место равенство

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0) \qquad (1)$$

Если обозначим $x = x_0 + \Delta x,\quad y = y_0 + \Delta y$, то равенство (1) можно переписать так:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \right] = f(x_0, y_0) \qquad (2)$$

или

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \right] = 0 \qquad (3)$$

либо

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0 \qquad (4)$$

Пример 1. Функция $z = x^2 + y^2$ непрерывно при любых x и y плоскости Oxy.

Решение:

$$\Delta z = \left[(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - (x^2 + y^2 \right] = 2x \cdot \Delta x + 2y \cdot \Delta y,$$

следовательно, $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

Если в некоторой точке $N(x_0, y_0)$ не выполняется условие (1), то точка $N(x_0, y_0)$ называется точкой разрыва функции $z = f(x,y)$.

9.1.5. Частные производные функции двух переменных

Определение 1. Частной производой по x от функции $z = f(x,y)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ по x к приращению Δx при стремления Δx к нулю.

Частная производная по x от функции $z = f(x,y)$ обозначается одним из символов

$$z'_x,\ f'_x(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Таким образом, по определению,

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Аналогично частная производная по y от функции $z = f(x,y)$ обозначается одним из символов

$$z'_y,\ f'_y(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y}$$

и определяется по формулу

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad (2)$$

Замечание 1. При вычисление производной от функции $z = f(x,y)$ по x, переменная y, считается постоянная, аналогично при нахождение производная от $z = f(x,y)$ по y, переменная x считается постоянная.

Пример 1. Найти частные производные функции

$$z = x^3 + 2xy + y^3$$

$$z'_x = (x^3 + 2xy + y^3)' = 3x^2 + 2y$$

$$z'_y = (x^3 + 2xy + y^3)' = 2x + 3y^2$$

9.1.6. Частные производные высших порядков

Частные производные $z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y)$ и $z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y)$, вообще говоря, является функциями переменных x и y. Поэтому можно снова находить частные производные.

Отметим, что частных производных второго порядка от функции $z=f(x,y)$ будет четыре:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)$$

Частные производные третьего порядка их будет, очевидно уже восемь. Вообще, частная производная $n-$го порядка есть первая производная от производной $(n-1)-$го порядка.

Пример 2. Найти частные производные второго порядка от функции $z=f(x,y)=x^2y+y^3$

Решение: $z'_x=2xy$ $\quad z'_y=x^2+3y^2$; $\quad z''_{xx}=2y$ $\quad z''_{xy}=2x$ $\quad z''_{yx}=2x$ $\quad z''_{yy}=6y$ Заметим, что $z''_{xy}=z''_{yx}$.

Пример 3. Найти z'''_{xxy} и z'''_{yyx} если $z=y^2e^x+x^2y^3+1$

Решение: $z'_x=y^2e^x+2xy^3$, $z''_{xx}=y^2e^x+2y^3$,

$$z'''_{xxy}=\left(y^2e^x+2y^3\right)'_x=2ye^x+6y^2\quad z'_y=2ye^x+3x^2y^2,$$

$$z''_{yx}=2ye^x+6xy^2,\quad z'''_{yxx}=\left(2ye^x+6xy^2\right)'=2ye^x+6y^2$$

Заметим, что $z'''_{xxy}=z'''_{yxx}$

Теорема. Если функция $z=f(x,y)$ и ее частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy} и f''_{yx} определены и непрерывны в точке $M(x,y)$,

$$z''_{xy}=z''_{yx}\qquad \left(f''_{yx}\neq f''_{xy}\right)$$

Аналогичная теорема имеет место и для функции любого числа переменных

Если $z=f(x,y,t)$ $\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial t}=\dfrac{\partial^3 z}{\partial t\partial x\partial y}$ $\quad \left(z'''_{xyt}=z'''_{txy}\right)$

9.1.7. Полное приращение и полный дифференциал

Пусть дано функция $z=f(x,y)$. Нам известно, что если x и y придадим приращению Δx и Δy соответственно, то функция z также получить приращение Δz, которое называется полным приращением функции $z=f(x,y)$ и определяется формулой

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \qquad (1)$$

Определение 1. Функция $z = f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если ее полное приращение Δz можно представить в виде

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y, \qquad (2)$$

где A и B числа, а $\alpha, \beta -$ бесконечно малые при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = 0$, $\lim\limits_{y\to 0}\beta = 0$. главная линейная часть Δz, равенства (2) $A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$ называется дифференциалом функции $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) и обозначается через dz. Итак,

$$dz = A\Delta x + B\Delta y \qquad (3)$$

Теорема 1. Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то существует пределы

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = A \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = B$$

Доказательство. Чтобы из Δz получить $\Delta_x z$ достаточно положить $\Delta y = 0$. Из (2) следует, что если $\Delta y = 0$, то

$$\Delta_x z = A\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}(A+\alpha) = A$$

Аналогично можно показать, что при $\Delta x = 0$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}(B+\beta) = B$$

Тогда для дифференциала dz имеем

$$dz = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y$$

Обычно вместо Δx и Δy пишут dx и dy.

Итак, для полного дифференциала dz имеем формулу

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy \qquad (4)$$

Пример 1. Найти dz для функции

$$z = f(x,y) = x^3y^2 + \sin(x^2 + y^2)$$

Решение. $z'_x = \dfrac{\partial x}{\partial x} = 3x^2y^2 + 2x\cdot\cos(x^2 + y^2)$,

$$z'_y = \frac{\partial x}{\partial y} = 2x^3y + 2y\cdot\cos(x^2 + y^2)$$

$$dz = \left(3x^2y^2 + 2x\cdot\cos(x^2 + y^2)\right)dx + \left(2x^3y + 2y\cdot\cos(x^2 + y^2)\right)dy$$

9.1.8. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях

Пусть функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). Тогда полное приращение этой функции

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \qquad (1)$$

Из (1) имеем

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta z \qquad (2)$$

Нам известно, что

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y \qquad (3)$$

Подставляя фомулу (3) в место (2) получим приближенную формулу

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y \qquad (4)$$

С помощью этой приближенной формулой мы можем вычислить значение функции в точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, зная его значение в точке (x_0, y_0).

Пример 1. Найти приближенное значение величины $\sqrt{1{,}03^2 + 1{,}98^3}$

Решение. Положим $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^3}$

$$x = x_0 + \Delta x = 1 + 0{,}03 \qquad y = y_0 - \Delta y = 2 - 0{,}02$$

$$x_0 = 1 \quad \Delta x = 0{,}03 \quad y_0 = 2, \quad \Delta y = -0{,}02$$

$$f(x_0, y_0) = \sqrt{1^2 + 2^3} = \sqrt{9} = 3$$

9.1.9. Производная сложной функции. Полный дифференциал сложной функции.

Пусть в уравнение

$$z = f(u,v) \qquad (1)$$

u и v являются функциями независимых переменных x и y, где $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. В этом случае z есть сложная функция от аргументов x и y.

Например, $z = u^3 v^2$, $u = x^2 + y^2$ $v = e^{x+y}$

Если функция $u(x,y)$, $v(x,y)$ имеют непрерывные частные производные, а функция $f(u,v)$ имеет непрерывные частные производные в точки (x_0, y_0) и она определяется по формуле

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \qquad (2)$$

Найдем производная функцию $z = u^3 v^2$, $u = x^2 + y^2$, $v = e^{x+y}$

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 3u^2 v$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial v} = 2u^3 v$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y$,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{x+y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^{x+y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2 v \cdot 2x + 2u^3 v \cdot e^{x+y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot e^{x+y} \cdot 2x + 2(x^2 + y^2)^3 \cdot e^{2x+2y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2 v \cdot 2y + 2u^3 v \cdot e^{x+y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot e^{x+y} \cdot 2y + 2(x^2 + y^2)^3 \cdot e^{2x+2y}$$

Полный дифференциал сложной функции.

Полный дифференциал сложной функции $z = f(u,v)$, где $u = u(u,y)$, $v = v(x,y)$ определяется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad (3)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy \qquad (4)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv \qquad (5)$$

Пример 1. $z = u^2v^2$, $u = x^2y$ $v = xy^2$. Найти $dz = ?$

Решение: 1) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy$ $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2$ 2) $\frac{\partial v}{\partial x} = y^2$ $\frac{\partial v}{\partial y} = 2xy$

3) $\frac{\partial z}{\partial u} = 2uv^2$ $\frac{\partial z}{\partial v} = 2u^2v$

Тогда согласно (5) имеем:

$$dz = 2uv^2 \cdot (2xydx + x^2dy) + 2u^2v \cdot (y^2dx + 2xydy) =$$

$$= 2x^2y \cdot x^2y^4(2xydx + x^2dy) + +2x^4y^2 \cdot xy^2(y^2dx + 2xydy)$$

9.1.10. Производная в данном направлении. Градиент функции.

Производной функции $z = f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ в направлении вектора $l = \overline{MM_1}$ называется предел

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{MM_0 \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{M_0 \cdot M} = \lim_{MM_0 \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}$$

где $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}$.

В частности, $\frac{\partial z}{\partial x}$ есть производная функции $z = f(x,y)$ по положительному направлению оси Ох, а $\frac{\partial z}{\partial y}$ – производная по направлению $\frac{\partial z}{\partial l}$ характеризует скорость изменение функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению $\vec{l}$. для простоты, можно считать, что $\vec{l}$ − единичный вектор с координатамы $(\cos\alpha, \cos\beta)$.

Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то в этой точке существует производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ по любому направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ и она вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta \qquad (1)$$

где $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x_0, y_0)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y'(x_0, y_0)$.

В случае функции трех переменных $u = f(x,y,z)$ производная по данном направлении определяется по формуле.

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \qquad (2)$$

Градиентом функции $z = f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ называется вектор, выходящий из точки M, с координатами $\vec{l}\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ и она указывает направление максимального роста функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$. Градиент функции $z = f(x,y)$ обозначается через gradz и вычисляется по формуле

$$gradz = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} \qquad (3)$$

В случае функции $u = f(x,y,z)$ градиент функции равен

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \qquad (4)$$

$$|gradz| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} \qquad (5)$$

Пример 1. Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке M(1,1) в направлении вектора l, составляющем угол $\alpha = 60^\circ$ с положительным направлением оси Ox.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y \qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x_0=1\\ y_0=1}} = 2 \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\ y=1}} = -2$

$$\cos\alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 60^\circ\right) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Следовательно

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3} \qquad |gradz| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$$

Пример 2. Найти производную функции $u = f(x,y,z) = xy^2z^3$ в точке $M_0(3;2;1)$ в направлении вектора $\overline{MM_0}$, где $M(5;4;2)$.

Решение. Найдем вектор $\overline{MM_0} = l$

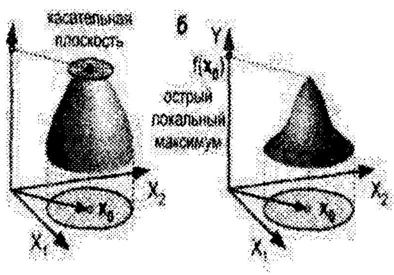
$$l = (5-3)\vec{i} + (4-2)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3} \qquad \cos\beta = \frac{2}{3} \qquad \cos\gamma = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2z^3\Big|_{\substack{y_0=2\\ z_0=2}} = 4 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3\Big|_{\substack{x_0=3\\ y_0=2\\ z_0=1}} = 12 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3\Big|_{\substack{x_0=3\\ y_0=2\\ z_0=1}} = 12$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2z^2\Big|_{\substack{x_0=3\\ y_0=2\\ z_0=1}} = 36$$ Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 4\cdot\frac{2}{3} + 12\cdot\frac{2}{3} + 36\cdot\frac{1}{3} =$$
$$= \frac{8+24+36}{3} = \frac{68}{3} = 22\frac{2}{3}.$$



Максимальная рост функции

$$|gradz| = \sqrt{4^2 + 12^2 + 36^2} =$$
$$= 4\sqrt{1+9+81} = 4\sqrt{91} \approx 38{,}15$$

9.1.11. Экстремумы функции двух независимых переменных

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и непрерывна в этой точке.

Определние 1. Если для всех точек (x,y) в окрестности точки (x_0,y_0) выполняется неравенсто $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ $(f(x,y)\ge f(x_0,y_0))$, то точка (x_0,y_0) называется точкой максимума (минимума) функции $f(x,y)$.

Пример 1. $z=f(x,y)=(x-2)^2+(y-1)^2-1$

Эта функция в точке $(x_0,y_0)=(2,1)$ достигает своего наименьшего значения.

Пример 2. $u=f(x,y,z)=0{,}5-\sin(x^2+y^2+z^2)$

Для этой функции точка $(0,0,0)$ является точкой максимума. Но в этой точке она не достигает наибольшего значения. Она достигает наибольшего значения $1{,}5$ если

$$\sin(x^2+y^2+z^2)=-1\Rightarrow x^2+y^2+z^2=\arcsin(-1)=\frac{3\pi}{2}.$$

Теорема 1. ***(Необходимое условие экстремума)*** Если функция $z=f(x,y)$ имеет экстремум в точке (x_0,y_0), то в этой точке частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ либо хотя бы одна из них не существует.

Согласно этой теоремы, чтобы найти точки экстремума, необходимо решить систему

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$$

Точки, в которых частные производные равны нулю называются стационарными или критичискими точками.

Пусть $M_0(x_0,y_0)$ – стационарная точка функции $z=f(x,y)$. Введем обозначения:

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \qquad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \qquad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \text{ и } \Delta=AC-B^2.$$

1) Если $\Delta>0$ и $A<0$, то в точке (x_0,y_0) функция $z=f(x,y)$ имеет максимум.

2) Если $\Delta>0$ и $A>0$, то в точке (x_0,y_0) функция $z=f(x,y)$ имеет минимум.

3) Если $\Delta<0$ то в точке (x_0,y_0) функция $z=f(x,y)$ не имеет экстремум.

4) Если $\Delta=0$, то ничего определённого про наличие экстремума сказать нельзя; требуется дополнительное исследование.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$z=4x^2-6xy-34x+5y^2+42y+7.$$

Решение: Будем следовать указанному выше алгоритму. Для начала найдём частные производные первого порядка:

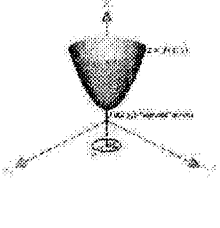
$$\frac{\partial z}{\partial x}=8x-6y-34; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-6x+10y+42.$$

Составим систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=8x-6y-34=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-6x+10y+42=0\end{cases}$

Сократим каждое уравнение этой системы на 2 и перенесём числа в правые части уравнений:

$$\begin{cases}4x-3y=17\\ -3x+5y=-21\end{cases}$$

Мы получили систему линейных алгебраических уравнений. Наиболее удобным применение метод Крамера для решения полученной системы.



$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & -3\\ -3 & 5\end{vmatrix}=4\cdot5-(-3)\cdot(-3)=20-9=11$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 17 & -3 \\ -21 & 5 \end{vmatrix} = 17 \cdot 5 - (-3) \cdot (-21) = 85 - 63 = 22$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 17 \\ -3 & -21 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-21) - 17 \cdot (-3) = -84 + 51 = -33.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{22}{11} = 2; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-33}{11} = -3;$$

Значения $x = -2$, $y = -3$ - это координаты точки $(2,-3)$. Теперь приступим по второму шагу алгоритма, Найдём производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 8; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6.$$

Вычислим значение Δ:

$$\Delta = A \cdot C - B^2 = 8 \cdot 10 - (-6)^2 = 80 - 36 = 44$$

Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то согласно алгоритму $(2,-3)$ есть точкой минимума функции z.

Минимум функции z найдём, подставив в заданную функцию координаты точки $(2,-3)$.

$$z_{\min} = z(2,-3) = 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 \cdot (-3) - 34 \cdot 2 + 5 \cdot (-3)^2 + 42 \cdot (-3) + 7 = -90$$

Ответ: $(2;-3)$ – точка минимума; $z_{\min} = -90$

Что должен знать студент

1. Понятие функции нескольких переменных.
2. Область определения и множество значений функции нескольких переменных.
3. Понятие линии уровня.
4. Частные производные функции нескольких переменных.
5. Частные производные высших порядков функции нескольких переменных.
6. Понятие дифференциала функции нескольких переменных.
7. Экстремум функции нескольких переменных.

Контрольный тест

1. Какая из приведенных функций, является функцией зависящей от двух переменных:

а) $z=e^{x^2-4}$; б) $z=e^x\cdot\cos(5x-11)$; в) $z=e^x\cdot\cos(5y-7)$;

г) $z=e^{y^2+11}$.

2. Для функции $z=x^2-xy+y^2$ частная производная по переменной x равна:

а) x^2-y+2y; б) $2x-y$; в) $-x+2y$; г) $2x-y+2y$.

3. Для функции $z=e^{2x-y^2}$ частная производная по переменной y равна:

а) $\frac{1}{2}e^{2x-y^2}$; б) $2e^{2x-y^2}$; в) $e^{2x-y^2}(-2y)$; г) $e^{2x-y^2}(2-2y)$.

4. Значение частной производной функции $z=x^3-xy-y^3$ по переменной x в точке $M_0(2,1)$ равно:

а) -5; б) 10; в) 11; г) 4.

5. Полный дифференциал функции $z=\frac{x}{y^2}$ равен:

а) $dz=\frac{1}{y^2}dx-\frac{2x}{y^2}dy$; б) $dz=\frac{1}{y^2}dx+\frac{2x}{y^3}dy$;

в) $dz=-\frac{2x}{y^3}dx+\frac{1}{y^2}dy$; г) $dz=\frac{1}{y^2}dx-\frac{2x}{y^3}dy$.

6. Если $z=f(x,y)$, f''_{xy}, f''_{yx}, определены в некоторой окрестности точки $M(x,y)$ и непрерывны в этой точке, то верно:

а) $f''_{xx}(x,y)=f''_{yy}(x,y)$; б) $f'_x(x,y)=f'_y(x,y)$;

в) $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$; г) $f''_{xy}(x,x)=f''_{yx}(y,y)$

7. Для функции $z=3-2x^2-xy-y^2$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ равна:

а) $-4x-y$; б) $-x-2y$; в) -1; г) 1.

8. Для функции $z=\ln(x^2+y)$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ равна:

а) $\dfrac{2y-2x^2}{(x^2+y)^2}$; б) $\dfrac{2y+2x^2}{(x^2+y)^2}$; в) $\dfrac{2y-2x^2}{(x^2+y)}$; г) $\dfrac{2(y-x^2)}{(x^2-y)^2}$.

9. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+y^2-4x+6y+17$:

а) функция имеет минимум; б) функция имеет максимум;
в) функция не имеет точек экстремума.

10. Стационарной точкой функции $z=x^2+y^2-4x-6y+17$ является точка:

а) $M(2,3)$; б) $M(1,2)$; в) $M(3,4)$; г) $M(1,3)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти частные производные функции:

а) $z=xy+5y^2+6x^3$;

б) $z=x^2y^3-15y^2-26x$;

в) $z=\sqrt{x^3+y^5}\cdot\left(x^2-y^3\right)^2$;

г) $z=\dfrac{e^{x^3}+y}{x^8}$.

2. Найти полный дифференциал функции:

а) $z=\sin^3\left(x+6y^2\right)$;

б) $z=\dfrac{xy^2+9}{x^2+y}$.

3. Найти экстремумы функций:

а) $z=x^2+2xy+2y^2+5x-6y+1$; б) $z=3x^2-y^2+4x+2y+5$.

Глава X. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

1. Введение

При решение различных задач геометрии, физики, механики, техники, сельского хозяйство и других отраслях науки играют большую роль раздела дифференциальные уравнения курса высшей математики.

Отысканию неизвестной функции из уравнения, содержащего независимую переменную, искомой функцию и производные этой функции называется дифференциальным.

10.1.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Задача 1. Опытном путём установлено, что скорость размножения бактерий в любой момент времени положительно и пропорциональна их массе. Найти зависимость массы бактерий от времени.

Решение. Обозначим через $m(t)$ массу бактерий в момент времени t; Тогда $\frac{dm}{dt}$ будет скорость размножения этих бактерий. Согласно условию задачи скорость размножения $\frac{dm}{dt}$ пропорциональна массе $m(t)$ бактерий поэтому

$$\frac{dm(t)}{dt} = k \cdot m(t) \tag{1}$$

где $k > 0$.

Уравнение (1) содержит искомые функции $m(t)$ и её производную, поэтому является дифференциальным уравнением. Убедимся, что любая функция вида

$$m(t) = C \cdot e^{kt} \tag{2}$$

где $C-$произвольная постоянная, является решением уравнения (1)

Задача 2. Скорость распада радия пропорциональна её массе. Если через t_0 года её масса уменьшается на половину, то найти закон распада радия. За 100 лет её масса на сколько процент уменьшается.

Решение. Обозначим через $m(t)$ массу радия в момент времени t, m_0 её массу в момент $t=0$. Тогда скорость распада будет равна $\dfrac{dm(t)}{dt}$ и она будет отрицательным, потому что с ростом t она уменьшается. Итак по условию задачи

$$\frac{dm(t)}{dt} = -k \cdot m(t) \qquad (3)$$

где $k > 0$.

Уравнение (3) также являются дифференциальным. Позже покажем, что она имеет решения

$$m(t) = C \cdot e^{-kt} \qquad (4)$$

10.1.2. Основные понятия и определения

Определение 1. Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и её производные $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Символически дифференциальное уравнение (ДУ) записывают так:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

Например, уравнения $2x + y - 3y' = 0$ $y'' - 3y' + 2y = 0$ $y'^2 - 4y = 0$ являются дифференциальными уравнениями .

Определения 2. Порядком ДУ называется наибольший порядок производных, входящих в данное уравнение.

Определение 3. ДУ первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (2)$$

Например, $xy + y - 2 = 0$ есть ДУ первого порядка.

Определение 4. ДУ вид

$$y' = f(x, y) \qquad (3)$$

называется уравнение первого порядка, разрешённым относительно производной. Например, $y' = \dfrac{y}{x}$

Определение 5. Решением ДУ (1) называется любая функция $y=y(x)$, дифференцируемая по крайней мере n раз и такая, что при ее подстановке в уравнение (1) последнее обращается в тождество.

Например, для ДУ $y'-y=0$ одним из решений являются функция $y=e^x$.

Однако это решение не единственное: любая функция вида $y=Ce^x$, где $C-$ постоянная, такие являются решением данного уравнения и оно называется общее решение. Придавая C определенное числовое значение мы будем получать конкретные или, как говорят, частные решения уравнения

$$y'-y=0.$$

В качестве другого примера рассмотрим уравнение второго порядка

$$y''=0 \Rightarrow y'=C_1 \Rightarrow y=C_1x+C_2$$

где C_1 и C_2 постоянные. Это решение является общее решение уравнения. При конкретных значениях C_1 и C_2 будем получать частные решения.

Из этих примеров можно заметить, что общее решение зависит от стольких произвольных постоянных , каков порядок уравнения.

Отметим, что решение любого ДУ находятся путем ее интегрирования и поэтому в ее решения участвует произвольные постоянные C_i, $i=1,...,n$. Таким образом общее решение ДУ

$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$$

имеет вид

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$$

и она называется интегральными кривыми .

Пример 1. Найти общее решение уравнение $y'=\dfrac{y}{x}$

Решение: $y'=\dfrac{y}{x} \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x} \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dy}=\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \quad \int\dfrac{dy}{dy}=\int\dfrac{dx}{x} \Rightarrow$

$$\ln y = \ln x + \ln C \Rightarrow y = Cx$$

Это уравнение представляет семейство прямых проходящих через начало координат.

10.1.3. Дифференциальные уравнение первого порядка. Задача Коши.

Определение 6. ДУ вида

$$y' = f(x) \qquad (1)$$

называется простейшее ДУ первого порядка.

Уравнение (1) имеет решение $y = F(x) + C$.

Действительно, $y' = f(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \varphi(x) \Rightarrow dy = f(x)dx$

$$\Rightarrow y = \int f(x)dx + C = F(x) + C$$

где $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$.

Пример 1. Решить уравнение $y' = x\sqrt{x}$

Решение: $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{x} \Rightarrow dy = x\sqrt{x}dx \Rightarrow$

$$y = \int x\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$$

Задача Коши.

При решение конкретных задач часто необходимо выделить из всей совокупности решений ДУ то частное решение, которое является ответом на постоянный вопрос. Таким образом требуется найти решение $y = y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, которое при заданном значении $x = x_0$ аргумента x принимает заданное значение $y = y_0$ т.е $y|_{x=x_0} = y_0$ оно называется частным решением удовлетворяющим начальном условии. Нахождение такую решение называется задача Коши.

Теорема (Коши). Если в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$ то существует такая окрестность точки (x_0, y_0) в которой уравнения $y' = f(x, y)$ имеет единственное решение удовлетворяющим начальным условиям $y|_{x=x_0} = y_0$

Определение 7. Если задание начальной точки (x_0, y_0) определяет единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$, то такое решение называется частным решением.

Иногда не удается получить решения дифференциального уравнения в явной форме $y = y(x)$ или $y = y(x, C)$ а получают их в неявной форме, т.е. решение задается формулой вида $\Phi(x, y) = 0$ или $\Phi(x, y, C) = 0$. Выражение $\Phi(x, y, C) = 0$ называется общим интегралом уравнения $y' = f(x, y)$. Например уравнения $y' = -\frac{x}{y}$ имеет решение в неявной форме $x^2 + y^2 = 2C \Rightarrow x^2 + y^2 - c = 0$.

Значит, выражение $\Phi(x, y, C) = x^2 + y^2 - c = 0$ является общим интегралом уравнения $y' = -\frac{x}{y}$

10.1.4. Дифференциальные уравнение с разделенными и разделяющиеся переменными.

Во многих случаях ДУ первого порядка $F(x, y, y') = 0$ задаются в виде

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (1)$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ известные непрерывные функции.

Если в уравнение (1) $M(x, y) = M(x)$ и $N(x, y) = N(y)$, то имеем уравнение

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется ДУ первого порядка с разделенными переменными. Общее решение этого уравнение имеет вид

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

Пример 1. Решить уравнения $xdx+ydy=0$

$$xdx+ydy=0 \Rightarrow \int xdx+\int ydy=C \Rightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C \Rightarrow x^2+y^2=2C=C_1^2$$

С геометрической точки зрения совокупность всех решений этого уравнения представляет собой семейство кругов центр которого находятся в начало координат.

Если уравнение (1) $M(x,y)=M_1(x)M_2(y)$ и $N(x,y)=N_1(x)N_2(y)$, то получим уравнение

$$M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0 \quad (3)$$

Уравнение (3) называется ДУ первого порядка с разделяющиеся переменными.

Для решения уравнения (3) разделим обе части на произведение $N_1(x)M_2(y)\neq 0$.

Тогда после очевидных сокращений получим ДУ.

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\frac{M_2(y)}{N_2(y)}dy=0. \quad (4)$$

с разделенными переменными.

В этом случае общий интеграл уравнения будет равна

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\int \frac{M_2(y)}{N_2(y)}dy=C. \quad (5)$$

Пример 2. Найти частное решение ДУ $(1+x^2)dy+ydx=0$ при начальном условии $y(1)=1$.

Решение. Разделяя переменные получим

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{y}=-\int \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \ln|y|=-arctgx+C$$

Это и есть общий интеграл данного уравнения. Теперь, используя начальное условие, найдем произвольную постоянную C.

$$\ln 1=-arctg1+C \Rightarrow C=\frac{\pi}{4} \quad \text{итак } y=e^{-arctgx+\frac{\pi}{4}}$$

10.1.5. Дифференциальные уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Определение 1. Уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрерывные дифференцируемые функции, для которых выполняется соотношение

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

где $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области.

Если выполняется равенство (2), то левая часть уравнения (1) будет полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т.е. уравнение (1) имеет вид

$$du(x,y) = 0 \qquad (3)$$

Итак, общий интеграл (1) или (3) имеет вид

$$u(x,y) = C \qquad (4)$$

где для $u(x,y)$ имеет место формула

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}dx\right]dy \qquad (5)$$

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения

$$(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$$

Решение. Сначала проверим условия (2).

$$M(x,y) = 2x^3 - xy^2, \quad N(x,y) = 2y^3 - x^2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy$$

Условие (2) выполняется значит, решение исходного уравнения находим по формуле (5) т.е.

$$u(x,y)=\int(2x^3-xy^2)dx+\int\left[(2y^3-x^2y)-\int(-2xy)dx\right]dy=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2y^2}{2}+$$
$$+\int\left[(2y^3-x^2y)-\int(-2xy)dx\right]dy=2\frac{x^4}{4}-\frac{x^2y^2}{2}+2\frac{y^4}{4}-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^2y^2}{2}+C=$$
$$=\frac{x^4}{2}-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}+C$$

Интегрирующий множитель

Если левая часть уравнеия (1) т.е. $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ не является полным дифференциалом иначе говоря не выполняется условия (2), то можно подобрать такую функцию $\mu=\mu(x,y)$, после умножения всех членов уравнения (1) получается уравнения полным дифференциалом.

Итак, уравнения

$$\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0 \qquad (6)$$

является полным дифференциалом, и должна выполнятся соотношение

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \qquad (7)$$

Функция $\mu=\mu(x,y)$ называется интегрирующим множетелем уравнения (1). $\mu=\mu(x,y)$ находятся одна из следующих формул:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}&=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}\\ \frac{\partial\ln\mu}{\partial x}&=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{N}\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Пример 2. Решить уравнение $(y+xy^2)dx-xdy=0$

Решение: $M(x,y)=y+xy^2,\ N(x,y)=-x$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1+2xy,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=-1\qquad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Согласно формулу (8) находим интегрирующий множитель $\mu=\mu(x,y)$

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=\frac{-1-1-2xy}{y+xy^2}=\frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)}=-\frac{2}{y}\Rightarrow$$

$$\partial\ln\mu=-\frac{2}{y}dy\Rightarrow\int d\ln\mu=-2\int\frac{dy}{y}\Rightarrow$$

$$\ln\mu=-2\ln y\Rightarrow\mu=y^{-2}=\frac{1}{y^2}$$

Умножая данного уравнения на $\mu=\frac{1}{y^2}$ получим уравнение

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0$$

в полных дифференциалах. Потому что, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}$.

Решение последного уравнения находим по формуле (5).

$$M(x,y)=\frac{1}{y}+x,\quad N(x,y)=-\frac{x}{y^2}$$

$$u(x,y)=\int\left(\frac{1}{y}+x\right)dx+\int\left[-\frac{x}{y^2}-\int-\frac{1}{y^2}dx\right]dy=\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+\int\left[-\frac{x}{y^2}+\frac{x}{y^2}\right]dy+C$$

$$u(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+C.$$

10.1.6. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 1. Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией k – того измерения (k – тый степени) если при любом t – имеет место тождество

$$f(tx,ty)=t^k f(x,y) \tag{1}$$

Например, $f(x,y)=x+y$ –однородные первого измерения $f(x,y)=x^2+y^2$ – однородные второго измерения.

Определение 2. Дифференциальные уравнение первого порядка $y' = f(x,y)$ называется однородным, если $f(x,y)$ однородная функция нулевого измерения.

Уравнение $y' = f(x,y)$ можно представить в виде

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2)$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ - однородные функции одинакового измерения.

Однородные дифференциальное уравнение приводится к дифференциальному уравнению с разделяющимся через постановкой

$$\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx \qquad (3)$$

где $z = z(x)$ –новая неизвестная функция

Пример 1. Найти решения уравнения $(x^2 - 2y^2)dx + 2xydy = 0$

Решение. В этом уравнение функции $M(x,y) = x^2 - 2y^2$, $N(x,y) = 2xy$ -однородные второго измерения. Поэтому, данное уравнение является однородным.

Положим $y = zx \Rightarrow dy = xdz + zdx$. Тогда заданное уравнение имеет вид

$$x^2dx - 2(zx)^2dx + 2xzx(zdx + xdz) = 0,$$

т. е.
$$x^2dx - 2z^2x^2dx + 2z^2x^2dx + 2zx^3dz = 0,$$

или
$$x^2dx + 2zx^3dz = 0 \,|\, :x^2 \neq 0$$

$$dx + 2zxdz = 0$$

Разделяем переменные

$$2zdz + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \int 2zdz + \int \frac{dx}{x} = C_1$$

$$z^2 + \ln|x| = \ln C_1 \Rightarrow \ln|x| - \ln|C_1| = -z^2$$

$$\ln\left|\frac{x}{C_1}\right| = -z^2 \Rightarrow \frac{x}{C_1} = e^{-z^2} \Rightarrow x = C_1e^{-z^2}.$$

Поскольку $z = \dfrac{y}{x}$ то $x = C_1e^{-\frac{y^2}{x^2}}$

Пример 2. Найти частное решение уравнения $2xyy' = x^2 + y^2$ если $y = 2$ при $x = 1$. **Ответ:** $x^2 - y^2 + 3x = 0$

10.1.7. Дифференциальные уравнения приводимые к однородным

Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

при $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ приводится к однородным подстановкой $x = u + \alpha, y = v + \beta,$

где $(\alpha;\beta)$-точка пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0.$

Если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0,$ то подстановка $a_1x + b_1y = t$ позволяет разделить переменные.

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения

$$(2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1)dy = 0$$

Решение: $y' = -\left(\dfrac{2x + y + 1}{x + 2y - 1}\right)$. Поскольку $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$.

Находим точку пересечения прямых $2x + y + 1 = 0$ и $x + 2y - 1 = 0$ имеем $x = \alpha = -1, y = \beta = 1.$ Сделаем замену переменных $x = u - 1$ и $y = v + 1$, $dx = du$, $dy = dv$. Тогда исходное уравнение преобразуется к виду

$$(2u + v)du + (u + 2v)dv = 0$$

В полученном однородном уравнении положим $\dfrac{v}{u} = t \Rightarrow v = ut \Rightarrow dv = udt + tdu$

Тогда придем к уравнению с разделяющимся переменным

$$2(t^2+t+1)udu+u^2(1+2t)dt=0 \Rightarrow$$

$$\frac{du}{u}=-\frac{(1+2t)dt}{2(y^2+t+1)}=-\frac{d(t^2+t+1)}{2(t^2+t+1)}$$

$$\ln|u|=-\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)+\ln C$$

$$u=\frac{C}{\sqrt{t^2+t+1}} \Rightarrow u^2(t^2+t+1)=C^2$$

Поскольку $t=\frac{v}{u}$, то

$$u^2\left(\frac{v^2}{u^2}+\frac{v}{u}+1\right)=C^2 \Rightarrow u^2+uv+v^2=C^2$$

Возвращаясь к переменным x и y т.е $u=x+1,\ v=y-1$ после элементарных преобразований найдем общий интеграл исходного уравнения

$$x^2+y^2+xy+x-y=C_1,\ C_1=C^2-1$$

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения

$$(x+y+2)dx+(2x+2y-1)dy=0$$

Решение. Поскольку $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0$, то сделаем замену $y+x=t \Rightarrow dy=dt-dx$

Тогда данное уравнение примет вид

$$(t+2)dx+(2t-1)(dt-dx)=0,\ \text{или}$$

$$(3-t)dx+(2t-1)dt=0 \Rightarrow dx+\frac{2t-1}{3-t}dt=0 \Rightarrow dx-\frac{2t-1}{t-3}dt=0$$

$$x-2t-5\ln|t-3|=C,\quad t=x+y\quad -x-2y-5\ln|x+y-3|=C$$

10.1.8. Линейные дифференциальное уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли

Уравнение вида

$$y'+p(x)y=Q(x) \tag{1}$$

называется линейным, где $p(x)$ и $Q(x)$ заданные функции. Таким образом искомая функция y и ее производная y' входит в линейное уравнение в первой степени.

Если в частном случае $Q(x)=0$ то уравнение (1) называется однородным уравнением, т.е.

$$y'+p(x)y=0 \tag{2}$$

Например уравнения $y'=y\cos^2 x+x^2$, $xy'=y+e^x$ -линейные, а уравнения $yy'+xy^3=\sin x$ не является линейным.

Линейное уравнение первого порядка (1) удобно интегрировать методом Бернулли, который заключается в следующем:

1) Сделается подстановки $y=uv \Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=uv'+u'v$ где $u=u(x)$ и $v=v(x)$-две неизвестные функции тогда исходное уравнение имеет вид :

Тогда уравнение примет вид

$$u'v+uv'+P(x)uv=Q(x),$$

или

$$u[v'+P(x)v]+vu'=Q(x) \tag{3}$$

Пользуясь тем, что одна из неизвестных функции (например v) может быть выбрана совершенно произвольно, за v принимают любое частное решение уравнения

$$v'+P(x)v=0 \;\Rightarrow\; v=e^{-\int P(x)dx} \tag{4}$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$vu'=Q(x)\Rightarrow u'=\frac{Q(x)}{v}=Q(x)e^{\int P(x)dx}\Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx}=Q(x)e^{\int P(x)dx}\Rightarrow u=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$$

(5)

Таким образом, общее решение исходного уравнения согласно (4) и (5) будет равна

$$y=uv=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right] \tag{6}$$

Пример 1. Найти общее решения уравнения $y' - \frac{1}{x} y = x^2$

Решение: 1) $-\int P(x)dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

2) $e^{-\int P(x)dx} = e^{\ln|x|} = x$

3) $e^{\int P(x)dx} = e^{-\ln|x|} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

4) $\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx = \int x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2}$

5) $y = x\left[\frac{x^2}{2} + C\right]$

Уравнение Бернулли.

Нелинейное уравнение вида

$$y' + p(x)y = Q(x)y^m \tag{1}$$

где $m \neq 0, m \neq 1$, называется уравнением Бернулли. Его можно преобразовать в линейное уравнение, путем замены $z = y^{1-m}$, которое исходное уравнение сводится к виду

$$\frac{1}{1-m} z' + P(x)z = Q(x) \tag{2}$$

Уравнение (1) можно интегрировать с помощью методом Бернулли $y = uv$, либо методом вариации произвольной постоянной.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение

$$y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 4\frac{arctgx}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{y}$$

Решение. Проинтегрируем его методом Бернулли, для чего положим $y = uv$.

Подставляя в исходное уравнение $y = ux$, $y' = u'v + v'u$, сгруппируем члены, содержащие u в первой степени:

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{1+x^2} v\right) = 4\frac{arctgx}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{uv}$$

Принимаем за v какое-либо частное решение уравнения

$$v' - \frac{2x}{1+x^2}v = 0$$

Разделяя в нем переменные, находим

$$\frac{dv}{v} = \frac{2xdx}{1+x^2} \Rightarrow \quad \ln = \ln(1+x^2) \Rightarrow v = 1+x^2$$

Для отыскания и имеем уравнение

$$u'v = 4\frac{arctgx}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{uv},$$

или

$$v = 1+x^2 \quad u' = 4\frac{arctgx}{1+x^2}\sqrt{u}$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{2arctgx}{1+x^2} \Rightarrow \sqrt{u} = arctg^2x + C$$

Таким образом, $u = (arctg^2x + C)^2$ и общее решение исходного уравнение имеет вид

$$y = uv = (1+x^2)(arctg^2x + C)^2.$$

10.1.9. Линейные дифференциальные уравнение второго порядка с постоянным коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0 \tag{1}$$

где коэффициенты a_0, a_1, a_2 -постоянны причем $a_0 \neq 0$. Разделив все члены уравнения на a_0 и обозначим $\frac{a_1}{a_0} = p, \frac{a_2}{a_0} = q,$ то уравнение (1) имеет вид

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2}$$

Как известно для нахождения общего решения линейного однородного уравнения второго порядка достаточно знать его фундаментальную систему частных решений. Будем искать частное решение уравнение (2) в виде

$$y = e^{kx} \qquad (3)$$

Дифференцируя эту функцию дважды и поставляя выражения для y, y' и y'' в уравнение (2), получим $(k^2 + pk + q)e^{kx} = 0$

Так как $e^{kx} \neq 0$, $x \in R$ то сокращая на e^{kx} получим

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (4)$$

Следовательно, если k будет удовлетворять уравнению (4) то e^{kx} будет решением уравнения (1) .

Уравнение (4) называется характеристическим уравнением по отношению к уравнению (1). Характеристическое уравнение есть квадратное уравнение, имеющее два корня обозначим их через k_1 и k_2. При этом

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Возможны следующие случаи

1. k_1 и k_2 - действительные причем
2. k_1 и k_2 –комплексные числа
3. k_1 и k_2 –действительные равное числа т.е k_1 и k_2

Рассмотрим каждый случай отдельно.

I. Корни характеристического уравнения действительны и различны $k_1 \neq k_2$.

В этом случае честными решениями уравнения (1) будут функции $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$.

Эти решения линейно независимы т.к $\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq Const$

Следовательно, общий интеграл уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \qquad (5)$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 0$

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + k - 2 = 0$

которое имеет корни $k_1=1$ и $k_2=-2$. Тогда общий интеграл есть $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$

II. Корни характеристического уравнения комплексные;

Пусть $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$, где $\alpha=-\frac{p}{2}$, $\beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$

В этом случае частные решения можно записать в форме

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x},\quad y_2=e^{(\alpha-i\beta)x} \tag{6}$$

Эти решения можно представить в виде суммы действительной и минимой части

$$y_1=e^{\alpha x}[\cos\beta x+iSin\beta x]$$

$$y_2=e^{\alpha x}[\cos\beta x-iSin\beta x]$$

частными решениями уравнения (1) будут действительные функции

$$\overline{y_1}=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \overline{y_2}=e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{7}$$

Функции $\overline{y_1}$ и $\overline{y_2}$ линейно независим так как

$$\frac{\overline{y_1}}{y_2}=\frac{e^{2x}\cos\beta x}{e^{2x}\sin\beta x}=ctg\beta x\neq const$$

Следовательно общее решение уравнение (1) в случае комплексных корней характеристического уравнения имеет вид

$$y=C_1\overline{y_1}+C_2\overline{y_2}=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{8}$$

где C_1 и C_2 -произвольные постоянные.

Важным частным случаем решения (8) являются случай, когда корни характеристического уравнения чисто мнимые.

Это имеет место тогда когда в уравнение (1) $p=0$ и она имеет вид $y''+qy=0$

Характеристическое уравнение (4) примет вид $k^2+q=0$, $q\geq 0$ $k_{1,2}=\pm i\sqrt{q}=\pm i\beta$, $\alpha=0$

В этом случае решение (8) имеет вид $y=C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x$

Пример 2. Дано уравнение $y''+2y'+5y=0$

Найти общий интеграл и частное решение , удовлетворяющее начальным условиям. $y|_{x=0}=0$ $y'|_{x=0}=1$

Решение. 1) Напишем характеристическое уравнение $k^2+2k+5=0$ и найдем её корни $k_1=-1+2i$, $k_2=-1-2i$.

Следовательно, общий интеграл есть

$$y=e^{-x}[C_1\cos 2x+C_2\sin 2x]$$

2) Найдем частное решение:

$$y'=-e^{-x}[C_1\cos 2x+C_2\sin 2x]+e^{-x}[-2C_1\cos 2x+2C_2\sin 2x]$$

$$\begin{cases} y|_{x=0}=0\Rightarrow \\ y'|_{x=0}=1\Rightarrow \end{cases}\left\{\begin{matrix} 0=C_1 \\ 1=-C_1+2C_2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{matrix} C_1=0 \\ C_2=\dfrac{1}{2} \end{matrix}$$

Таким образом, искомое частное решение будет $y=\dfrac{1}{2}e^{-x}\sin 2x$

III. Корни характеристического уравнения действительные и равные $k_1=k_2=k_0$

В этом случае одно частное решение берем $y_1=e^{k_1x}$. Нужно найти второе частное решение, линейно независимое с первым.

Будем искать второе частое решение в виде $y_1=u(x)\cdot e^{k_1x}$, где $u(x)$ -неизвестная функция подлежащая определению

Нетрудно показать что $u(x)$ будет равна $u(x)=Ax+Bx$. В частности, можно положить $A=1,B=0$ тогда $u=x$.

Таким образом в качестве второго частного решения можно взять: $y_2=x\cdot e^{k_1x}$

Это решение линейно независимо с первым так как

$$\frac{y_2}{y_1}=x\neq const$$

Поэтому общее решение уравнение (1) будет функция

$$y=C_1\cdot e^{k_1x}+C_2\cdot e^{k_1x}=e^{k_1x}(C_1+C_2) \qquad (9)$$

Пример 3. Решить уравнение $y''-4y'+4=0$

Решение: $k^2-4k+4=0\Rightarrow(k-2)^2=0\Rightarrow k_1=k_2=k_0=2$

Общим интегралом будет $y=e^{2x}(C_1+C_2x)$

Дифференциальные уравнения высшего порядка.
10.2.1. Дифференциальные уравнения второго порядка.

Дифференциальные уравнения второго порядка в общем случае записывается в виде:

$$F(x,y,y',y'')=0 \qquad (1)$$

или в виде, разрешенном относительно второй производной

$$y''=f(x,y,y') \qquad (2)$$

Как и в случае уравнения первого порядка, для уравнения второго порядка могут существовать общее и частное решение. А это рассмотрим на конкретном примере.

Пример 1. $y''=2$

Для решения этого уравнения введем обозначения

$$y'=u(x).$$

Тогда $y''=u'(x)$, и исходное уравнения примет вид $u'=2$.

Отсюда следует, что $u=2x+C_1 \Rightarrow y'=2x+C_1$.

Последнее интегрируя еще раз, найдем

$$y=x^2+C_1x+C_2.$$

Полученное общее решение зависит от двух произвольных постоянных. Геометрически это решение представляет множество парабол. Для выделения из множества этих кривых какой –либо одной интегральной кривой необходимо, кроме координат точки (x_0,y_0), через которую проходят параболы, дополнительно задать угловой коэффициент касательной, т.е. значение производной y' в этой точке.

Таким образом, условия, с помощью которых из общего решения уравнения второго порядка выделяется частное решение (начальные условия), имеют вид:

$y\big|_{x=x_0}=y_0, y'\big|_{x=x_0}=y'_0$ где x_0,y_0 и y'_0 – заданные числа.

Зададим, на примере 1 следующие начальные условия: $y\big|_{x=1}=2$, $y'\big|_{x=1}=1$

Поскольку $\begin{cases} y' = 2x + C_1 \\ y = x^2 + C_1x + C_2 \end{cases}$

то используя начальные условия, получаем для определения C_1 и C_2 систему уравнения.

$$\begin{cases} 1 = 2\cdot 1 + C_1 \\ 2 = 1 + C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Следовательно искомое частное решение имеет вид $y = x^2 - x + 2$. Нахождение такое решение называется задачей Коши, которое имеет для уравнения второго порядка.

Таким образом для уравнения второго порядка, имеет место теорема существования и единственности.

Теорема. Пусть правая часть $f(x,y,y')$ уравнения $y'' = f(x,y,y')$ ее частные производные $f'_y(x,y,y')$ и $f'_{y'}(x,y,y')$ определены и непрерывны в некоторой области D изменения переменных x, y и y'. Тогда какова бы ни была внутренная точка (x_0, y_0, y'_0), этой области, данное уравнение имеет единственное решение $y = g(x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \qquad (3)$$

Функция $y = g(x, C_1, C_2)$ называется общим решением уравнения (2) в области D.

Частное решение уравнение (2), будет $y = g(x, C_{10}, C_{20})$ удовлетворяющим начальным условием (3), где C_{10} и C_{20} находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} y_0 = g(x_0, C_1, C_2) \\ y'_0 = g'(x_0, C_1, C_2) \end{cases}$$

На примере 1 мы видели, что частное решение имеет вид $y = x^2 - x + 2$

10.2.2. Простейшие уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

Здесь мы рассмотрим уравнение второго порядка, которые с помощью замены переменной сводятся к уравнению первого порядка.

1. Уравнение $y'' = f(x)$

называется простейшим уравнения второго порядка. Введем новую функцию $u = u(x)$ и положим $y' = u(x)$. Тогда $y'' = u'(x)$, и мы получим уравнение первого порядка: $u' = f(x)$. Решая его, имеем

$$u(x) = \int f(x)dx + C_1,$$

где $F(x)-$ одна из первообразных $f(x)$. Так как $u(x) = y'$, то имеем, что $y' = F(x) + C_1$. Отсюда, интегрируя еще раз, находим общее решение уравнения (1):

$$y = \int F(x)dx + C_1x + C_2.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' = \sin x$.

$$y' = u(x) \Rightarrow y'' = u'(x) \Rightarrow u'(x) = \sin x$$

$$u(x) = -\cos x + C_1 \Rightarrow y' = -\cos x + C_1 \Rightarrow y = -\int(\cos x + C_1)dx = -\sin x + C_1x + C_2.$$

2. $y'' = f(y, y')$

Этом уравнение x явно не содержит.

Для понижения порядка уравнения снова пологаем $y' = u(y)$ где $y = y(x)$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{du(y)}{dx} = \frac{du(y)}{dx} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Поскольку $\frac{dy}{dx} = u(y)$, то

$$y'' = \frac{du}{dy} \cdot u = f(y, u)$$

получим уравнение первого порядка относительно функции $u = u(y)$.

Пусть $u(y)=g(y,C_1)$ является общим решением последнего уравнения. Учитывая, что $u(y)=\dfrac{dy}{dx}$, получим уравнение разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx}=g(y,C_1)\Rightarrow\frac{dy}{g(y,C_1)}=dx\Rightarrow\int\frac{dy}{g(y,C_1)}=x+C_2$$

Пример 3. Решить уравнение $y''=\dfrac{(y')^2}{y}$

Решение. $y'=u(y)\Rightarrow y''=\dfrac{du}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dy}\cdot u$

Тогда $\quad y''=\dfrac{(y')^2}{y}\Rightarrow u\cdot\dfrac{du}{dy}=\dfrac{u^2}{y}\quad\Rightarrow$

$$\frac{du}{u}=\frac{dy}{y}\Rightarrow\ln u=\ln yC_1\Rightarrow u=\frac{dy}{dx}=yC_1\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{y}=C_1dx\Rightarrow\ln y=C_1x+\ln C_2\Rightarrow y=C_2e^{C_1x}.$$

3. $$y''=f(x,y')\tag{3}$$

В этом уравнение y явно не содержит. Пологая $y'=u\Rightarrow$ $y''=u$ и получим уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=u\Rightarrow dy=u(x,C_1)dx\Rightarrow y=\int u(x,C_1)dx+C_2$$

Пример 4. Решить уравнение $(1+x^2)y''-2xy'=0$

$$\Rightarrow y''=\frac{2x}{1+x^2}y'.$$

Решение. Пологая $y'=u\Rightarrow y''=u'$

$$u'=\frac{2x}{1+x^2}u\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{2x}{1+x^2}u\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{du}{u}=\frac{2x}{1+x^2}dx\Rightarrow\ln u=\ln\left|1+x^2\right|+\ln C_1$$

$$u=(1+x^2)\cdot C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=(1+x^2)\cdot C_1 \Rightarrow$$

$$y=\int C_1(1+x^2)dx+C_2=C_1(x+\frac{x^3}{3})+C_2$$

10.2.3. Понятие о дифференциальных уравнениях высших порядков.

Дифференциальное уравнение $n-$го порядка в общем виде записывается следующим образом:

$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$$

или если она разрешено относительно $y^{(n)}$, то

$$y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

Общее решение уравнения $n-$го порядка зависит от n производных постоянных, т.е. является функцией вида

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n). \qquad (2)$$

При конкретных значениях постоянных

$$C_1=C_{10},C_2=C_{20},...,C_n=C_{n0}$$

получается частное решение уравнения.

Для того чтобы из общего решения уравнения выделить частное решение, задаются начальные условия. В случае уравнения n – го порядка начальные условия имеют вид:

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0, y'\Big|_{x=x_0}=y_0',..., y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)} \qquad (3)$$

Используя начальные условия (3) постоянные $C_1,C_2,C_3,...,C_n$ определяется из следующей системы:

$$\begin{cases} y_0=\varphi(x_0,C_1,C_2,..,C_n) \\ y_0'=\varphi'(x_0,C_1,C_2,..,C_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x_0,C_1,C_2,..,C_n) \end{cases} \qquad (4)$$

Пример. Найти общее решение уравнения третьего порядка $y''' = 24x+6$ и выделить из него частное решение удовлетворяющее начальным условиям:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, y'\big|_{x=x_0} = y_0', y''\big|_{x=x_0} = 1$$

Решение.

$$y''' = (y'')' = 24x+6 \Rightarrow y'' = 12x^2 + 6x + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = (y')' = 12x^2 + 6x + C_1$$

$$y' = 4x^3 + 3x^2 + C_1 x + C_2 \Rightarrow$$

$$y = x^4 + x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3$$

Теперь найдем частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям.

$$y' = 4x^3 + 3x^2 + C_1 x + C_2$$

$$y'' = 12x^2 + 6x + C_1$$

В этом примере система (4) имеет вид:

$$\begin{cases} 0 = C_3 \Rightarrow C_3 = 0 \\ 0 = C_2 \Rightarrow C_2 = 0 \\ 1 = C_1 \Rightarrow C_1 = 1 \end{cases}$$

И так, требуем частное решение, имеет вид:

$$y = x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2.$$

10.2.4. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

Большое количество задач математики механики, электротехники и других технических наук сводятся к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка.

1. Определение и общее свойства. Дифференциальное уравнение вида

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \tag{1}$$

называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Здесь коэффициенты $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ и $b(x)-$ заданные функции аргумента x.

Пологая $a_0(x) \neq 0$, обе части уравнения (1) разделим на $a_0(x)$, то получим

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{2}$$

Где $p(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}, q(x) = \dfrac{a_2(x)}{a_0(x)}, f(x) = \dfrac{b(x)}{a_0(x)}$.

Если $f(x) = 0$, то уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{3}$$

называется однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Если же $f(x) \neq 0$, то уравнение (2) называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка.

Например, уравнения $y'' - 5y' + 6y = e^x$ и $y'' + y' + x^2 y = 0$ являются линейным, причем первое из них неоднородное, а второе – однородное.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка.

Рассмотрим некоторые теоремы (или свойства) относительно решений линейных однородных дифференциальных уравнений.

Теорема 1. Если y_1 и y_2 два частных решения линейного однородного уравнения второго порядка (3), т.е.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

то $y_1 + y_2$ есть также решение этого уравнения.

Теорема 2. Если $y_1 = y_1(x)$ есть решение уравнения (3) и C – постоянная, то Cy_1 есть также решение уравнения (3).

Определение 1. Два решения (3) y_1 и y_2 называется линейно независимыми на отрезке $[a,b]$, если их отношение на этом отрезке не является постоянным, т.е если

$$\frac{y_1}{y_2} \neq const.$$

В противном случае решения называются линейно зависимыми. Иными словами, два решения y_1 и y_2 называются линейно зависимыми на отрезке $[a,b]$, если существует такое постоянное число k, что $\frac{y_1}{y_2} = k \Rightarrow y_1 = ky_2$ при $a \le x \le b$.

Пример 1. Пусть имеем уравнение $y'' - y = 0$.

Легко проверить, что функции $e^x, e^{-x}, 3e^x, 5e^{-x}$, являются решениями этого уравнения. При этом функции e^x и e^{-x} линейно независимы на R, так как $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x} \ne const.$

Тогда как функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = 3e^x$ линейно зависимы, так как $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{3e^x} = \frac{1}{3} = const.$

Определение 2. Если $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ суть функции от x то определитель (детерминант)

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2$$

называется определителем *Вронского* или вронскианом данных функций.

Теорема 3. Если функции y_1 и y_2 линейно зависимы на отрезке $[a,b]$, то $W(y_1, y_2) = 0$.

Теорема 4. Если функции y_1 и y_2 являются линейно независимыми два решения уравнения (3) то $W(y_1, y_2) \ne 0$.

В этом случае общее решение уравнения (3) имеет вид $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где C_1 и C_2 произвольные постоянные. Например для примера 1 решения $y_1 = e^x$ и $y_2 = -e^x$ являются линейно независимыми т.е.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \ne 0,$$

Следовательно общее решение имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Неоднородные линейные уравнения второго порядка.

10.3.1. Основные теоремы для решений неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Пусть имеем неоднородное линейное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

где p и q - постоянные числа, $f(x)$ - известная функция.

Структура общего решения такого уравнения (1) определяется следующей теоремой.

Теорема 1. Общее решение неоднородного уравнения (1) представляется как сумма какого-нибудь частного решения этого уравнения и общего решения $y^* = y^*(x)$, $\bar{y} = \bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2}$$

Итак, общего решения уравнения (1) имеет вид

$$y = \bar{y}(x) + y^*(x) \tag{3}$$

Нетрудно доказать, что сумма (3) есть общее решение уравнения (1). Таким образом, если известно общее решение $\bar{y} = \bar{y}(x)$ однородного уравнения (2), то основная задача состоит в нахождении какого-либо частного решения $y^* = y^*(x)$ уравнения (1). Укажем общий метод нахождения частных решений неоднородного уравнения, которое называется методом вариации произвольных постоянных. Метод вариации заключается в следующем. Пусть общее решение однородного уравнения (2) есть

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения следует искать в виде $$u(x) = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 \tag{4}$$

где функция $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases} \tag{5}$$

Решение этой системы находится по формулам:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx \quad ; \; C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx$$

где $w(y_1, y_2)$ – определитель Вронского.

Тогда общее решение уравнения (1) будет равна

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + u(x)$$

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{ctgx}{x}$$

Решение. Можно показать что частные решения однородного уравнения $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$ будут функции $y_1 = \frac{\sin x}{x}$, $y_2 = \frac{\cos x}{x}$. Из Вронского $w(y_1, y_2) = -\frac{1}{x^2}$

Поэтому $u(x)$ можно найти по формулам (4) и (6) т.е.

$$u(x) = y_1 \cdot C_1(x) + y_2 \cdot C_2(x) = -\frac{\sin x}{x} \int \frac{\frac{\cos x}{x} \cdot \frac{ctgx}{x}}{-\frac{1}{x^2}} dx + \frac{\cos x}{x} \int \frac{\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{ctgx}{x}}{-\frac{1}{x^2}} dx =$$

$$= \frac{\sin x}{x} \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx - \frac{\cos x}{x} \int \cos x dx = \frac{\sin x}{x} \left[\ln\left| tg\frac{x}{2} \right| + \cos x \right] - \frac{\cos x}{x} \sin x = \frac{\sin x}{x} \ln\left| tg\frac{x}{2} \right|$$

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x} \ln\left| tg\frac{x}{2} \right|$$

10.3.2. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим теперь уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (1)$$

где p и q- некоторые числа, а правая часть $f(x)$- известная функция.

Однородное уравнение соответствует уравнению (1) есть

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (2)$$

нам известно, что общее решение уравнения (1) представляет собой сумму общего решения уравнения (2) $\bar{y}(x)$ и частного решения $y^*(x)$ уравнения (1), т.е.

$$y = y^*(x) + \bar{y}(x) \qquad (3)$$

Частное решение $y^*(x)$ уравнение (1) можно найти методом вариации постоянных, с которым мы познакомились в первом пункте. Однако, если правая часть уравнения (1) имеют специальный вид, то существует более простой способ нахождения частного решения. Этот способ называется методом подбора или методом неопределенных коэффициентов формы частного решения (1). Рассмотрим некоторые случаи по отдельности.

Пусть правая часть уравнения (1)

$$f(x) = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} + a_n$$

В этом случае частное решение $y^*(x)$ следует искать в виде

$$y^*(x) = Q_n(x) \times x^r \qquad (4)$$

Здесь $Q_n(x)$ - многочлен той же степени, что и многочлен $P_n(x)$, но с неизвестными коэффициентами , а r - число корней характеристического уравнения, равных нулю.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' + y' = 5x + 3$

Решение. Характеристическое уравнение

$$k^2 + k = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = -1$$

Тогда общее решение однородного уравнения

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{-x} = C_1 + C_2 e^{-x}$$

Поскольку $\qquad f(x) = P_1(x) = 5x + 3$

и $r=1$, то частное решение, согласно формуле (4), надо искать в виде $y^* = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx$

Подберем коэффициенты A и B таким образом, чтобы y^* было решением данного уравнения. Для этого подставим выражение для y^* в данное уравнение

$$(Ax^2+Bx)''+(Ax^2+Bx)'=5x+3$$
$$2A+2Ax+B=5x+3 \Rightarrow 2Ax+2A+B=5x+3$$
$$\begin{cases} 2A=5 \\ 2A+B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A=5 \\ 5+B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{5}{2} \\ B=-2 \end{cases}$$

Итак, частное решение данного уравнения имеет вид

$$y^*=\frac{5}{2}x^2-2x,$$

А общее решение будет

$$y=\bar{y}+y^*=C_1+C_2e^{-x}+\frac{5}{2}x^2-2x$$

II. Правая часть уравнение

$$f(x)=e^{ax}\cdot P_n(x)$$

где $P_n(x)$ - многочлен, $a\in R$.

В этом случае частное решение y^* следует искать в виде

$$y^*=Q_n(x)e^{2x}\cdot x^r \qquad (5)$$

Здесь $Q_n(x)$ - многочлен той же степени, что и многочлен $P_n(x)$, а r - число корней характеристического уравнения, совпадающих с коэффициентом a в показателе.

Замечание. Если $a=0$ имеет место случай (I).

Пример 2 Найти общее решение уравнения

$$y''-2y'-3y=(x+2)e^{3x}$$

Решение: Характеристическое уравнение

$$k^2-2k-3=0 \Rightarrow k_1=-1, k_2=3$$

Общее решение однородного уравнения

$$\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$$

Поскольку $k_2=a=3$, то r=1, и частное решение y^* следует искать в виде $y^*=(Ax+B)e^{3x}\cdot x$

Находим $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ и ставим в исходное уравнение, после упрощений имеем

$$8Ax + (2A + 4B) = x + 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8A = 1 \\ 2A + 4B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{8} \\ B = \dfrac{7}{16} \end{cases}$$

Тогда частное решение будет

$$y^* = \left(\frac{1}{8}x + \frac{7}{16}\right)e^{3x} \times x$$

Общее решение

$$y = \bar{y} + y^* = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} + \frac{x}{8}\left(x + \frac{7}{2}\right)e^{3x}$$

III. Если $f(x) = ax + b$, то частное решение (1) пишется в виде $y^* = Ax + B$

IV. Если $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ то частное решение (1) пишется в виде $\qquad y^* = Ax^2 + Bx + C$

V. Если $f(x) = ae^{mx}$, то частное решение (1) пишется в виде

$$y^* = Ae^{mx}$$

VI. Если $f(x) = M\cos mx + N\sin mx$, где M, N и m – заданные числа.

В этом случае частное решение y^* следует искать в виде

$$y^* = A\cos mx + B\sin mx$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 5y = 2\cos x - \sin x$$

Решение: Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 5 = 0$ имеет корни $k_1 = -2 + i, k_2 = -2 - i$

Тогда общее решение уравнения (2) имеет вид

$$\bar{y} = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$$

Частное решение (1) надо искать в форме

$$y^* = A\cos x + B\sin x$$

$$y^{*\prime} = -A\sin x + B\cos x \quad ; \quad y^{*\prime\prime} = -A\cos x - B\sin x$$

Подставляя $y^*, y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в данное уравнение, получим

$$(4A+4B)\cos x+(4B-4A)\sin x=2\cos x-\sin x$$

$$\begin{cases}4A+4B=2\\4B-4A=-1\end{cases}\Rightarrow A=\frac{3}{8},B=\frac{1}{8}$$

Таким образом, частное решение уравнения

$$y^*=\frac{3}{8}\cos x+\frac{1}{8}\sin x$$

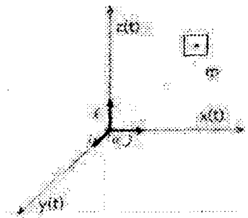
а общее решение уравнения

$$y=y^*+\bar{y}=\frac{3}{8}\cos x+\frac{1}{8}\sin x+e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$$

Система дифференциальных уравнений

10.4.1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Во многих задачах математики, физики и техники требуется определить сразу несколько функций, связанных между собой несколькими дифференциальными уравнениями. Совокупность таких уравнений называется системой дифференциальных уравнений.



Предположим, что по некоторым кривой L в пространстве под действием силы F движется материальная точка m. Требуется определить закон движения, зависимость координат точки от времени $x=x(t), y=y(t)$ и $z=z(t)$

Обозначим через $r=r(t)-$ радиус-вектор движущейся точки, то $r=x(t)i+y(t)j+z(t)k.$

Скорость и ускорение движущейся точки вычисляются по формулам

$$v=\frac{dr}{dt}=\frac{dx}{dt}i+\frac{dy}{dt}j+\frac{dz}{dt}k,$$

$$a=\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}i+\frac{d^2y}{dt^2}j+\frac{d^2z}{dt^2}k.$$

Сила F, под действием которой движется точки, является функцией времени, координат точки и проекцией скорости на оси координат. На основании второго закона Ньютона уравнение движение точки имеет вид:

$$ma=F$$

Проектируя векторы, стоящие в левой и правой частях этого равенства, на оси координат, получим три дифференциальных уравнения движения:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=F_x(t,x,y,z,\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{dz}{dt},) \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=F_y(t,x,y,z,\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{dz}{dt},) \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2}=F_z(t,x,y,z,\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{dz}{dt},) \end{cases} \qquad (1)$$

Путем решения этой системы находим закон движения материальной точки в пространстве т.е. $x=x(t), y=y(t)$ и $z=z(t)$.

Мы ограничимся изучением только системы уравнений первого порядка специального вида относительно искомых функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$. Эта система имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,...,y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx}=f_2(x,y_1,y_2,...,y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx}=f_n(x,y_1,y_2,...,y_n) \end{cases} \qquad (2)$$

и называется системой в нормальной форме, или нормальной системой.

В нормальной системе правые части уравнений не содержат производных искомых функций.

Решением системы (2) называется совокупность функций $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$, удовлетворяющих каждому из уравнений этой системы.

Системы уравнений второго, третьего и более высоких порядков можно свести к нормальной системе, если ввести новые искомые функции. Так, например, система (1) преобразуется к нормальной вводя новые функции

$$u(t) = \frac{dx}{dt}, v(t) = \frac{dy}{dt}, w(t) = \frac{dz}{dt}$$

Рассмотрим, например, нормальную систему трех уравнений с тремя неизвестными функциям и $x = x(t), y = y(t)$ и $z = z(t)$.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t, x, y, z) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t, x, y, z) \\ \dfrac{dz}{dt} = f_3(t, x, y, z) \end{cases} \tag{3}$$

Для этой нормальной системы ДУ теорема Коши о существовании и единственности решения формулируется следующим образом.

Теорема. Пусть правые части уравнений системы (3), т.е. функции $f_i(t, x, y, z)$, $i = 1,2,3$ непрерывны по всем переменным в некоторой области D и имеет в ней непрерывные частные производные: $\frac{df_i}{dx}, \frac{df_i}{dy}, \frac{df_i}{dz}$,

Тогда каковы бы ни были значения t_0, x_0, y_0, z_0 принадлежащие области D, существует единственное решение системы $x = x(t), y = y(t)$ и $z = z(t)$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x_0 = x_0(t), y_0 = y_0(t), z_0 = z_0(t) \tag{4}$$

Для нахождения решения нормальную систему можно применить метод исключения неизвестных.

Покажем его применение на примере. Для простоты ограничимся системой двух уравнений.

Пример 1. Пусть дана система уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y \end{cases}$

Найти общее и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0, y(0) = 1$

Решение. Дифференцируем первые из уравнений системы по t находим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$$

Учитывая второе уравнение системы имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} + (-2x - 5y)$$

Теперь из первого уравнения системы находим y т.е.

$y = \dfrac{dx}{dt} + 7x,$ это ставим к последнему уравнению и получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7x\frac{dx}{dt} - 2x - 5\frac{dx}{dt} - 35x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 37x = 0$$

Итак, мы пришли к линейному однородному уравнению второго порядка относительно одной неизвестной функции $x = x(t)$. Составим характеристическое уравнение т.е. $x(0) = k^2 + 12k + 37 = 0 \quad k_{1,2} = -6 \pm i, \alpha = -6, \beta = 1$.

Тогда общее решение этого уравнения будет

$$x(t) = e^{-6t}\left[C_1 \cos t + C_2 \sin t\right] \qquad (*)$$

$$\frac{dx}{dt} = e^{-6t}\left[(-6C_1 \cos t + C_2)\cos t - (6C_2 + C_1)\sin t\right] \qquad (**)$$

(*) и (**) ставим в $y = \dfrac{dx}{dt} + 7x$ и получим

$$y = y(t) = e^{-6t}\left[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t\right] \quad (***)$$

Таким образом (*) и (***) являются решением данной системы т.е.

$$\begin{cases} x = e^{-6t}\left[C_1\cos t + C_2\sin t\right] \\ x = e^{-6t}\left[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t\right] \end{cases}$$

Теперь находим частные решения удовлетворяющим начальным условиям

$$x(0) = 0 \text{ и } y(0) = 1$$

$$\begin{cases} 0 = e^0\left[C_1\cos 0 + C_2\sin 0\right] \\ 1 = e^0\left[(C_1 + C_2)\cos 0 + (C_2 - C_1)\sin 0\right] \end{cases} \Rightarrow 0 = C_1, C_1 + C_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Следовательно искомое частное решение имеет вид

$$x = e^{-6t}\sin t, \quad y = e^{-6t}\left[\cos t + \sin t\right]$$

10.4.2. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим еще один метод интегрирования, применимый только к нормальным системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Для простоты ограничимся системой(ЛДУ) трех уравнений с тремя неизвестными функциями $x = x(t), y = y(t)$ и $z = z(t)$ т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \dfrac{dz}{dt} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases} \quad (1)$$

Будем искать частное решение этой системы в виде

$$x = \alpha e^{kt}, y = \beta e^{kt}, z = \gamma e^{kt} \quad (2)$$

Нам нужно определить коэффициенты α, β, γ и показатель степени k так, чтобы функция (2) была решением системы (1).

Подставим эти функции и их производные в (1) и сокращая на множитель $e^{kt} \neq 0$, получим

$$\begin{cases} k\alpha = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma \\ k\beta = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma \\ k\gamma = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_{11}-k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22}-k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33}-k)\gamma = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) является однородной системой уравнений. Для того чтобы система (3) имела решения, отличные от нулевого, определитель системы должно быть равно нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

Из (4) получим уравнение третьей степени относительно k и называется характеристическим уравнением для системы (1). Ограничимся случаем, когда характеристическое уравнение имеет различные действительные корни k_1, k_2, k_3.

Для каждого из этих корней напишем соответствующую систему уравнений (4) и определим коэффициенты $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$;

Если обозначим частные решения системы, соответствующие корню характеристического уравнения k_i, через $x_i, y_i, z_i, i = 1,2,3,$ то общее решение системы ДУ (1) запишется в виде

$$x(t) = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3$$
$$y(t) = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$$
$$z(t) = C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3$$

или

$$\begin{cases} x(t) = C_1\alpha_1 e^{k_1t} + C_2\alpha_2 e^{k_2t} + C_3\alpha_3 e^{k_3t} \\ y(t) = C_1\beta_1 e^{k_1t} + C_2\beta_2 e^{k_2t} + C_3\beta_3 e^{k_3t} \\ z(t) = C_1\gamma_1 e^{k_1t} + C_2\gamma_2 e^{k_2t} + C_3\gamma_3 e^{k_3t} \end{cases}$$

Если среди корней характеристического уравнения (4) имеются комплексные вида $k_j = m \pm in, j = 1,2,3,$ то частные решения системы (1) ищется в виде:

$$x_j=\alpha_j e^{(m\pm in)t}, y_j=\beta_j e^{(m\pm in)t}, z_j=\gamma_j e^{(m\pm in)t}, j=1,2,3$$

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x'(t)=-x+y+z \\ y'(t)=x-y+z \\ z'(t)=x+y-z \end{cases}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение системы. Поскольку $a_{11}=a_{22}=a_{33}=-1$, то

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 & 1 \\ 1 & -1-k & 1 \\ 1 & 1 & -1-k \end{vmatrix}=0$$

$(k-1)(k^2+4k+4)=0 \Rightarrow k_1=1, k_2=k_3=-2$

1) При $k=1$ находим решения системы (3) т.е.

$$\begin{cases} -2\alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta-2\gamma=0 \\ \alpha+\beta-2\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha+\beta+\gamma=0 \\ -\alpha-\beta+2\gamma=0 \\ \alpha+\beta-2\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta-2\gamma=0 \\ \alpha+\beta-2\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta-2\gamma=0 \end{cases}$$

Решения последней однородной системы находим согласно формулам:

$$\alpha_1=m\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3m \quad \beta_1=-m\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3m$$

$$\gamma_1=m\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3m$$

В частности, если $m=1, \alpha_1=\beta_1=\gamma_1=-3$.

2) при $k_2=k_3=-2$ система (3) имеет вид

$$\begin{cases} -3\alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha-3\beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta-3\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\alpha+\beta+\gamma=0 \\ -2\alpha-2\beta+2\gamma=0 \\ \alpha+\beta-3\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha-3\beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta-3\gamma=0 \end{cases}$$

Определитель этой системы будет

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \equiv -16 \neq 0$$

В этом случае последняя система имеет единственное нулевое решение $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$ Итак, при $k_2 = -2$ $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$ и при $k_3 = -2$ также $\alpha_3 = \beta_3 = \gamma_3 = 0$

Таким образом, исходная система имеет решение

$$x(t) = -3C_1e^t + 0 + 0 = -3C_1e^t,\ y(t) = -3C_1e^t + 0 + 0 = -3C_1e^t$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие дифференциального уравнения.
2. Общее и частное решения дифференциального уравнения.
3. Виды дифференциальных уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, однородные дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения, уравнения Бернулли) и методы их интегрирования.
4. Виды дифференциальных уравнений второго порядка (допускающие понижение порядка, линейные однородные и со специальной правой частью) и методы их интегрирования.
5. Экономические приложения дифференциальных уравнений.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

1 Дифференциальное уравнение с разделяющимися коэффициентами имеет вид:

а) $f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$; б) $f_1(x)dx = f_2(y)dy$;

в) $y' + p(x)y = q(x)$; г) $f_1(x)f_2(y)dx + f_3(x)f_4(y)dy = 0$.

2. Дифференциальное уравнение $x^2yy' = x + 1$ после разделения переменных примет вид:

а) $x^2y' = \frac{x+1}{y}$; б) $y' = \frac{x+1}{x^2y}$;

в) $x^2ydy = (x+1)dx$; г) $ydy = \frac{x+1}{x^2}dx$.

3. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в виде:

а) $y' + p(x)y = 0$; б) $y' + p(x)y = q(x)$;

в) $\frac{dy}{dx} = p(x) \cdot xy$; г) $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

4. Определить, какое из данных дифференциальных уравнений является с разделяющими переменными:

а) $xydx + dy = 0$; б) $(x + y)dx + ydy = 0$;

в) $y' + x^2y = \sin x$; г) $x^2y' + xy = y^2$.

5. Уравнение Бернулли имеет вид:

а) $y' + p(x)y = q(x)$; б) $y' + p(x)y = q(x)\cdot y$;

в) $y' + p(x)y = q(x)\cdot y^{\alpha}, \alpha \neq 1, \alpha \neq 0$; г) $y' + p(x)y = 0$.

6. Определить, какое из данных дифференциальных уравнений является однородным относительно переменных дифференциальных уравнений первого порядка:

а) $y' = xy$; б) $y' = xy + x^2$;

в) $x^2yy' = x^3 + y^3$; г) $x^2y' = 2xy + y^2$.

7. Общее решение дифференциального уравнения второго порядка $y'' = x + e^x$ имеет вид:

а) $y = \dfrac{x^3}{6} + e^x + C_1x + C_2$; б) $y = \dfrac{x^3}{6} + e^x + C_1$;

в) $y = \dfrac{x^3}{6} + e^x$; г) $y = \dfrac{x^3}{6} + e^x + C_1$.

8. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижения порядка, не содержащие явно функцию y, имеет вид:

а) $F(y, y', y'') = 0$; б) $F(x, y', y'') = 0$;

в) $F(y, y') = 0$; г) $y'' = f(y, y')$.

9. Общее решение дифференциального уравнения $y'' + 5y' = 0$ имеет вид:

а) $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x}$; б) $y = C_1 + C_2e^{-5x}$;

в) $y = C_1e^{-5x}$; г) $y = C_1e^{-5x} + C_2e^{5x}$.

10. Частное решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 5y' = x^2 - 4$ имеет вид :

а) $y^* = Ax + B$, б) $y^* = Ax^2 + Bx + C$,

в) $y^* = (Ax^2 + Bx + C)x$; г) $y^* = (Ax + B)e^x$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 12.1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y' = 4x^3$;

б) $(x^2+4)y' - 2xy = 0$;

в) $y' = y^2$;

г) $2xyy' = y^2 - 4x^2$;

д) $y'x - y - x^2 = 0$;

е) $y' - 4y = e^{2x}$;

ж) $y' - y\,tg\,x = \dfrac{2x}{\cos x}$;

з) $xy' - 3y + x^4y^2 = 0$.

Ответ:

а) $y = x^4 + C$;

б) $y = C(x^2+4)$;

в) $y = -\dfrac{1}{x+C}$;

г) $y^2 + 4x^2 - 8Cx = 0$

д) $y = x^2 + Cx$;

е) $y = Ce^{4x} - 0.5e^{2x}$;

ж) $y = \dfrac{x^2+C}{\cos x}$;

з) $7x^3 = y(x^7 + C)$.

Задача 12.2. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y'' - 4y' + 3y = 0$,

б) $y'' - 16y = 0$,

в) $y'' - 4y' + 13y = 0$,

г) $y'' + 4y = 0$,

д) $y'' + 3y' = 0$,

е) $y'' + 3y' - 4y - 12 = 0$.

Ответ:

а) $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$,

б) $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x}$,

в) $y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$,

г) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$,

д) $y = C_1 + C_2e^{-3x}$,

е) $y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - 3$.

Глава XI. ТЕОРИЯ РЯДОВ

11.1.1. Введение

При решение многих задач математического анализа приходится рассматривать суммы, составленных из бесконечного количество слагаемых. Задача суммирования бесконечного множества каких-то однотипных объектов (чисел, функции и т.п.) решается в теории рядов, составляющей одну из важных глав курса высшей математики. Таким образом, мы займемся изучением свойств бесконечных рядов, а также разложением функций в степенные и тригонометричесие ряды которые имеют широкое применение в прикладных задачах. Например, степенные ряды является незаменимым средством приближенных вычислений. В частности, с помощью степенных рядов вычисляются приближенное значений функций, приближенное вычисление корней, приближенное вычисление определенных интегралов и так далле. Например,

$\ln 0{,}5$, $\sqrt[4]{650}$, $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$.

11.1.2. Числовой ряд. Общий член ряда.

Определение 1. Пусть задана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

Выражение
$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$
называется числовым рядом. При этом числа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ называется членами ряда.

Член ряда a_n, с произвольным номером n называется общим членом. Ясно, что a_n есть некоторая функция от n, т.е. $a_n = f(n)$, $n \in N$.

Например, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ есть ряд с общим членом $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in N$.

Определение 2. Сумма конечнего числа n первых членов ряда называется n-й частичной суммой ряда и ее обозначим через S_n. Итак,

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{2}$$

$$S_1 = a_1 \qquad , S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

$$S_1 = a_1$$

11.1.3. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Сумма ряда

Определение 3. Если последовательность S_n частичных сумм имеет предел, т.е. существует число $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, то ряд называется сходящимся, а число называется суммой ряда.

В этом случае также говорят, что ряд сходится к сумме и пишут $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$

Если же $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. не существует, то говорят, что ряд расходится или он не имеет суммы.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$a + aq + aq^2 \ldots + aq^{n-1} + \ldots \tag{3}$$

Это геометрическая прогрессия с первым членом a и знаменателем q $(a \neq 0)$.

Сумма n первых членов геометрической прогресси равна при $(q \neq 0)$,

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Если $|q| > 1$ то $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е в этом случае ряд (3) расходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots \tag{4}$$

Так как $\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, то для n-й частичной суммы ряда имеем

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\Rightarrow S_n=\left(1-\frac{1}{1+n}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+n}\right)=1.$$

Итак, ряд (4) сходится и его сумма равна 1.

11.1.4. Общие свойства сходящихся рядов.

1°. Если ряд $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ сходится, то сходится и любой ряд, полученный из него отбрасыванием конечное число членов.

Доказательство. Пусть S_n – сумма n первых членов, ряда (1), S_k – сумма k отброшенных членов, S_{n-k} – сумма членов ряда, входящих в S_k. Тогда имеем $S_n=S_n+S_{n-k}$ где S_k – постоянное число, не зависящее от n. Из последнего соотношения следует, что, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-k}$.

2° Если ряд

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1)$$

сходится и его сумма равна S, то ряд

$$ka_1+ka_2+\ldots+ka_n+\ldots,$$

где k – какое –либо число, также сходится и его сумма равна kS.

3° Если ряды

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \text{ и } b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots$$

сходится и их суммы, соответственно равны S' и S'', то ряды

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)+\ldots$$

$$\text{И } (a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\ldots+(a_n-b_n)+\ldots$$

также сходится и их суммы, соответственно, равны $S'+S''$ и $S'-S''$.

11.1.5. Необходимые признак сходимости ряда

При исследовании рядов одним из основная задача заключается о том, что сходится ли данный ряд или рассходится. В приложениях обычно применяются лишь сходящиеся ряды. Поэтому важно знать признаки сходимости рядов. Рассмотрим сначала необходимый признак сходимости ряда.

Теорема (необходимый признак сходимости)

Если ряд сходится, то его n–й член стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Доказательство. Пусть ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ сходится, т.е. имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \tag{1}$$

где S – сумма ряда (конечное число); но тогда емеет место также равенство

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \tag{2}$$

Вычитая почленно из первого равенства второе, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

Что и требовалось доказать.

Следствие. Если n–й член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд расходится.

Пример 1. Ряд $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \ldots + \frac{n}{2n+1} + \cdots$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$

Отметим, что рассмотринный признак является только необходимым, но не является достаточным.

11.1.6. Достаточные признаки сходимости.

Теорема 1. (Первый признак сравнения)

Пусть имеем два ряда с положительными членами:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2}$$

Если члены ряда (1) не больше соответствующих членов ряда (2), т.е. $a_n < b_n$. $(n = 1,2,3...)$, и ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1).

Пример 3. Иследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

Решение. Исходный ряд сравниваем сходящего рядом

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2}, \qquad b_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

Поскольку $a_n < b_n \ (n = 1,2,3...)$, то согласно теоремы 1 исходный ряд также сходится.

Теорема 2. (Второй признак сравнения)

Если члены ряда (1) не меньше соответствующих членов ряда (2), т.е. $a_n \ge b_n$, и ряд (2) расходится, то и ряд (1) расходится.

Пример 4. Ряд $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$

рассходится, так как его члены (начиная со второго) больше соответствующих членов гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ который рассходится т.е. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{1}{n}$ $(n \ge 2)$. Поскольку $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$.

Признак Даламбера.

Если для ряда с положительными членами $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$, то :

1) если $d < 1$, ряд сходится,

2) а если $d>1$, ряд расходится.

Пример 5 Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\frac{7}{4^2}..+\frac{2n-1}{3^n}+...$$

Решение. $a_n=\dfrac{2n-1}{3^n}$ $\quad a_{n+1}=\dfrac{2n+1}{3^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3^n}\cdot\frac{3^n}{2n-1}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{3}$$

Итак, $d=\dfrac{1}{3}<1$, и следовательно данный ряд сходится.

Признак Коши

Если для ряда с положительными членами

$$a_1+a_2+...+a_n+...$$

Существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=K$$

1) $K<1$ то ряд сходится

2) $K>1$ то ряд расходится

Пример 6. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+...+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+...$$

Решение. Применим признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$. Ряд сходится.

Интегральный признак:

Пусть члены ряда

$$a_1+a_2+...+a_n+...$$

Положительны и не возрастает, т.е.

$$a_1\ge a_2\ge a_3\ge...,$$

и пусть $a_n=f(n)-$ ненпрерывная, невозрастающая функция, $n\in N$.

Если $\int_1^{\infty} f(x)dx$ несобственный интеграл сходится то ряд (1) сходится, если интеграл расходится то ряд (1) тоже расходится.

11.1.7. Знакопеременные ряды

До сих пор мы изучали только ряды, все члены которых были положительными. Теперь мы перейдем к рассмотрению рядов, содержащих как положительные, так и отрицательные члены. Такие ряды называются знакопеременными.

В качестве примера знакопеременного ряда приведем ряд

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}-...+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n^2}+... \quad (1)$$

Изучение знакопеременных рядов мы начнем с частного случая, так называемых знакочередующихся рядов, т. е. рядов, в которых за каждым положительным членом следует отрицательный, и за каждым отрицательным членом следует положительный.

Обозначая через $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ абсолютные величины членов ряда и считая, что первый член положителен, *знакочередующийся ряд* запишем следующим образом:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^n u+... \quad (2)$$

Для знакочередующихся рядов имеет место достаточный признак сходимости Лейбница.

Признак Лейбница. Если в знакочередующемся ряде (2) абсолютные величины членов убывают:

$$u_1>u_2>u_3>...>u_n>... \quad (3)$$

и общий член ряда стремится к нулю т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$, то ряд сходится и его сумма не превосходит первого члена ряда.

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму четного числа членов ряда

$$S_{2m}=u_1-u_2+u_3-u_4+...+u_{2m-1}-u_{2m}.$$

Сгруппируем члены попарно:

$$S_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+...+(u_{2m-1}-u_{2m}).$$

Так как по условию абсолютные величины членов ряда убывают, то все разности в скобках положительны и, следовательно, сумма S_{2m} положительна и возрастает при увеличении m.

Запишем теперь S_{2m}, группируя члены иным образом:

$$S_{2m} = u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + ... + (u_{2m-2} - u_{2m-1}) + u_{2m}].$$

Сумма в квадратных скобках будет также положительной. Поэтому $S_{2m} < u_1$ для любого значения m. Таким образом, последовательность четных частичных сумм S_{2m} возрастает с увеличением m, оставаясь при этом ограниченной. Следовательно, s_{2m} имеет предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = 0$. При этом, так как $S_{2m} < u_1$ то ясно, что $0 < S \le u_n$. Рассмотрим теперь сумму нечетного числа членов: $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$.

При $m \to \infty$ имеем

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(S_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = S,$$

так как по условию $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} + \lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$.

Таким образом, частичные суммы как четного, так и нечетного числа членов имеют общий предел S. Это означает, что вообще $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, т. е. ряд сходится. При этом, как видно из доказательства, сумма ряда S не превосходит первого члена ряда.

Пример 1. Исследовать, сходится или расходится ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2^2} - \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 4^2} - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n(n-1)^2} - ...$$

Решение. Этот ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница:

$$1)\frac{1}{1\cdot 2^2} > \frac{1}{2\cdot 3^2} > \frac{1}{3\cdot 4^2} > ... > \frac{1}{n(n-1)^2} > ...$$

$$2)\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)^2} = 0$$

Следовательно, ряд сходится.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая <u>знакопеременного ряда</u>. Будем предполагать, что в ряде

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... \tag{4}$$

Числа $u_1, u_2, u_3, ..., u_n ...$ могут быть как положительными, так и отрицательными. Для таких рядов имеет место следующий признак сходимости.

Теорема (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда). Если для знакопеременного ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... \tag{5}$$

сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + ... + |u_n| \tag{6}$$

то данный <u>знакопеременный ряд</u> также сходится.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный ряд, составленный из членов рядов (5) и (6):

$$\frac{u_1 + |u_1|}{2} + \frac{u_2 + |u_2|}{2} + ... + \frac{u_n + |u_n|}{2} + ... \tag{7}$$

Имеем:

$$\text{при } u_n > 0 \quad u_n = |u_n| \text{ и } \frac{u_n + |u_n|}{2} = \frac{|u_n| + |u_n|}{2} = |u_n|$$

$$\text{при } u_n < 0 \quad |u_n| = -u_n \text{ и } \frac{u_n + |u_n|}{2} = \frac{u_n + (-u_n)}{2} = 0$$

Таким образом, члены ряда (7) либо равны членам сходящегося ряда (6), либо меньше их. Поэтому ряд (7) сходится на основании признака сравнения

Умножив все члены сходящегося ряда (5) на $\frac{1}{2}$ получим сходящийся ряд

$$\frac{|u_1|}{2}+\frac{|u_2|}{2}+\ldots+\frac{|u_n|}{2}+\ldots \tag{8}$$

Рассмотрим теперь ряд, являющийся разностью сходящихся рядов (6) и (7)

$$\left(\frac{u_1+|u_1|}{2}-\frac{u_1}{2}\right)+\left(\frac{u_2+|u_2|}{2}-\frac{u_2}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{u_n+|u_n|}{2}-\frac{u_n}{2}\right)+\ldots$$

Этот ряд сходится на основании теоремы 2 п. 3.

Но ряд (4) получается из последнего ряда умножением всех его членов на 2:

$$2\cdot\left[\frac{u_n+|u_n|}{2}-\frac{|u_n|}{2}\right]=2\cdot\frac{u_n}{2}=u_n$$

Следовательно, ряд (4) также сходится .

Пример 2. Исследовать на сходимость знакопеременный ряд

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\ldots \tag{9}$$

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов

данного ряда

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots \tag{9'}$$

Этот ряд сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем $p=2>1$. Следовательно, на основании доказанного признака сходится и данный ряд (9). Этот признак является достаточным, но не необходимым. Это значит, что существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, в то время как ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Действительно рассмотрим ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots \tag{10}$$

который, очевидно, сходится по признаку Лейбница. Между тем, ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...$$

составленный из абсолютных величин членов данного ряда (9) является гармоническим и, следовательно, расходится.

Хотя рассмотренные выше ряды (9) и (10) оба сходятся, однако характер их сходимости различен.

Ряд (9) сходится одновременно с рядом , составленным из абсолютных величин его членов, тогда как ряд , составленный из абсолютных величин сходящегося ряда (10) расходится.

В связи с этим введем следующие определения.

Знакопеременный ряд

$$u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+....+|u_n|+...,$$

составленный из абсолютных величин его членов.

На основании достаточного признака сходимости знакопеременного ряда всякий *абсолютно сходящийся ряд* будет сходящимся.

Знакопеременный ряд

$$u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$$

называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+....+|u_n|+...,$$

составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Возвращаясь к рассмотренным выше примерам, можем сказать , что ряд (9) является абсолютно сходящимся, а ряд (10) условно сходящимся.

Среди знакопеременных рядов абсолютно сходящиеся ряды занимают особое место. Это объясняется тем, что на такие ряды переносятся основные свойства конечных сумм. Особое значение имеет свойство переместительности, которым обладают только абсолютно сходящиеся ряды.

Это свойство, которое мы приводим без доказательства, формулируется следующим образом.

Сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется от любой перестановки его членов. Наоборот, в неабсолютно сходящемся ряде нельзя переставлять члены, так как в случае их перестановки может измениться сумма ряда и даже получиться расходящийся ряд.

Говоря о перестановке членов, мы подразумеваем, что меняем местами бесконечное множество членов, так как, переставляя два, три, четыре или любое конечное число членов, мы, очевидно, не изменим суммы ряда.

Рассмотрим в качестве примера неабсолютно сходящийся ряд (10)

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\ldots$$

сумму которого обозначим через S.

Переставим члены этого ряда, поместив после каждого положительного члена два отрицательных. Получим ряд

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\ldots$$

Функциональные ряды

11.2.1. Область сходимости функционального ряда

Определение 1. Ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x) \tag{1}$$

члены которого являются функции от x, определенные в некоторой области изменения аргумента X называется функциональными.

Определение 2. Совокупность значений X, при которых функции $f_i(x), i=1,2,\ldots$ определены и ряд (1) сходится, называют областью сход имости функционального ряда.

Областью сходимости функционального ряда чаще всего бывает какой-нибудь промежуток оси OX.

Пример 1. Определить область сходимость функционального ряда

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\ldots+\frac{1}{x^{2n}}+\ldots$$

Решение. Члены ряда образуют геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{x^2}$ и $b_1 = \frac{1}{x^2}$

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}} \cdot \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}(x^2-1)}$$

геометрическая прогрессия сходится, если $|q| < 1$, и расходится, если $|q| > 1$.

Итак, данный ряд сходится для тех значений x, при которых $\frac{1}{x^2} < 1$ или $x^2 > 1 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases}$ т.е $-\infty < x < -1$ и $1 < x < +\infty$.

Частичная сумма функционального ряда, т.е сумма первых его *n* членов

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... f +_n (x) + \qquad (2)$$

Является функций переменной x и её обозначим через $S(x)$.

Например для примера 1 имеем

$$S(x) = \frac{x^{2n-1}}{x^{2n}(x^2-1)}$$

Достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда.

Признак Вейерштрасса

Если функции $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$ по абсолютной величине не превосходят в некоторой области X положительных чисел $C_1, C_2, ..., C_n, ...$ т.е $|f_n(x)| \le C_n, n = 1,2,3...$ и числовой ряд $C_1 + C_2 + ... + C_n + ...$ сходится, то функциональный ряд $f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ...$ в этой области сходится равномерно.

Пример 2. Исследовать сходимость функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in R.$$

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

согласно интегральному признаку сходится, то по признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно на $X \in R$.

11.2.2. Основные свойства равномерно сходящихся рядов

1°. Всякий функциональный ряд, равномерно сходящихся на $[a,b]$, сходится абсолютно в любой точке этого отрезка $[a,b]$.

2 °. Если члены равномерно сходящихся на отрезка $[a,b]$ функционального ряда $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$ непрерывны, то его сумма также непрерывна на отрезке $[a,b]$.

11.2.3. Интегрирование и дифференцированию функционального ряда.

1. Если ряд $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$ где $f_i(x)$, неспрерывные функции, равномерно сходится на $[a,b] \in X$ и имеет сумму $S(x)$ то ряд

$$\int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \dots + \int_a^b f_n(x)dx + \dots$$

сходится и имеет сумму $\int_a^b S(x)dx$

2. Пусть функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ определены в X и имеет в этой области производные $f_1'(x), f_2'(x), \dots, f_n'(x), \dots$.

Если в этой области ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right\}_x' .$$

Пример 3. Можно ли интегрировать на сегменте $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ функционального ряда

$$\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2^2}\cos 3x+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos nx+\ldots$$

Решение. Поскольку $\left|\frac{1}{2^{n-1}}\cos nx\right|\le\frac{1}{2^{n-1}}, n\in N$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ сходится, тогда согласно признаку Вейерштрасса исходный функционалный ряд равномерно сходится на $(-\infty,\infty)$.

Таким образом исходный ряд можно интегрировать почленно по отрезку $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos xdx+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos 2xdx+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos nxdx+\ldots$$

Степенные ряды

11.3.1. Степенной ряд. Теорема Абеля.

Определение 1. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots$$

где $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ и - постоянные числа.

В частности при $a=0$ то получим ряд $a=0$ то получим ряд
$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (2)$$

Например, $3+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\ldots$

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

является степенными рядамы.

Признак Абеля. Если степенной ряд (1) в точке $x=x_0$ сходится, то он абсолютно сходится при всех x удовлетворяющий неравенству $|x-a|<|x_0-a|$

11.3.2. Область сходимости степенного ряда.

Определение 2. Множества всех значений x для которых ряд (1) сходится называется *областью сходимости* степенного ряда.

Для степенного ряда (1) возможны только три случая:

1) Ряд сходится в единственный точке $x=a$;
2) Ряд сходится при всех значения x;
3) Существует такое $R>0$, что ряд сходится при всех x, для которых $|x-a|<R$, и расходится при всех x, для которых $|x-a|>R$.

Итак, областью сходимости ряда (1) является или точка $x=a$ или вся числовая прямая, или конечный интервал $(a-R, a+R)$, к которой присоединяется один или оба конца.

Определение 3. Интервал $(a-R, a+R)$ называется интервалом сходимости ряда (1), а число R называется радиусом сходимости этого ряда.

11.3.3. Радиус сходимости степенного ряда.

Для определения интервала и радиус сходимости ряда (1) можно поозваться одним из следующих способов.

1. Если среди коэффициентов $a_1, a_2, ..., a_n ...$ нет равных нулю, т.е. ряд содержит все целые положительные степени разности $x-a$, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (1^*)$$

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+...+\frac{1}{(n+1)^2}(x-2)^{n+1}+...$$

Решение. $a_n=\dfrac{1}{n^2},\ a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)^2}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2+\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1$$

Итак, ряд в промежутке $-1<x-2<1 \Rightarrow 1<x<3$ сходится.

Если $x=3$, то получим ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$$

которое согласно интегральному признаку сходится а если положим $x=1$, то имеем:

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+...+(-1)^n\frac{1}{n^2}+...$$

Этот ряд абсолютно сходится. Таким образом интервал сходимости исходного ряда будет $1\le x\le 3$

2. Если исходный ряд имеет вид

$$a_0+a_1(x-a)^p+a_2(x-a)^{2p}+...+a_n(x-a)^{np}+...$$

где $p\ge 2$, то

$$R=\sqrt[p]{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|} \qquad (2^*)$$

3. Если среди коэффициентов ряда есть равные нулю и последовательность оставшихся в ряде показателей степенной разности $x-a$ любая, то радиус сходимости можно находить по формуле

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}} \qquad (3^*)$$

Во всех случаях интервал сходимости можно находить применяя непосредственно признак Даламбера или признак Коши к ряду.

4. Степенные ряды можно по членное можно дифференцировать и интегрировать

Если $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n,\Rightarrow$$

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-a)^{n-1},$$

$$\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(x-a)^{n+1}}{n+1},$$

где $-R<x-a<R$.

11.3.4. Разложение функции в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена.

Введение

Во многих практических исследованиях приходится вычислить значений функций с определенной точности. Например, $e^{0,2}$, $\sqrt[3]{245}$, $\ln 2$, $arctg 1{,}2$ и другие. Оказывается, с помощью разложением функции в степенные ряды получим очень важные ряды формулы которые дает нам возможность вычислить значений функкции с большой точности. С этой целю мы познакомимся разложением функции в степенные ряды.

11.3.5. Разложение функции в степенные ряды.

Всякая функция, бесконечно дифференцируемая в интервале $|x-a|<R$ т.е $a-R<x<a+R$, может быть разложена в этом интервале в сходящейся к ней бесконечный степенной ряд Тейлора которые имеет вид

$$1+x+x^2+...+x^n+... \qquad (1)$$

Этот ряд представляет геометрическая прогрессия с первом членом равным $b_1=1$ и со знаменателем $q=x$. Тогда сумма этого ряда будет равна

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{1-x}$$

Таким образом, мы получим разложение функции $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ в степенной ряд т.е.

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+... \qquad (1)$$

1) Разложение функции $f(x)=\ln(1+x)$ в степенной ряд.

В разложение (1) положим $x=-z$,

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+...+(-1)^{n-1}x^{n-1}+...$$

Поскольку $0\le|z|\le|x|<1$, то последнее равенство можно интегрировать в пределах от 0 до x, т.е.

$$\int_0^x \frac{1}{1+z}dz = \int_0^x (1-z+z^2-z^3+...+(-1)^{n-1}x^{n-1}+...)dz$$

$$\ln(1+z)\Big|_0^x = \left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+...+(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}+...\right)\Bigg|_0^x \Rightarrow$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+... \quad -1<x<1 \qquad (2)$$

Если в этой формуле заменить x на $-x$ то получаемая ряд

$$\ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+... \qquad (3)$$

который сходится в интервале $(-1;1)$.

С помощью рядов (1) и (2) можно вычислить логарифмы чисель, заключенных между нулем и двумя.

Можно вывести формулу для вычисления натуральных логарифмов любых целых чисел.

Вычитая из равенства (2) почленно равенства (3) получим

$$\ln(1+x)-\ln(1-x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = 2[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...]$$

Положим, далее,

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n} \Rightarrow x = \frac{1}{2n+1}$$

При любом $n>0$ имеем $0<x<1$, поэтому

$$\ln\frac{n+1}{n} = 2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+...\right]$$

при $n=1$ отсюда получаем:

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+...\right] = 0,693147$$

2) Разложение функции $f(x) = arctgx$ в степенной ряд.

В разложение (1) положим, $x=-z^2$, то получим

$$\frac{1}{1+z^2} = 1-z^2+z^4-z^6+...+(-1)^n x^{2n}+...$$

Этот ряд можно интегрировать в пределах от 0 до x т.е.

$$\int_0^x \frac{1}{1+z^2}dz = \int_0^1 (1-z^2+z^4-z^6+...+(-1)^n z^{2n}+...)dz$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

Например при $x=1$, получим

$$arctg1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + ...$$

11.3.6. Разложение элементарных функции в ряд Маклорена.

Нам известно, что ряд Маклорена имеет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \qquad (1)$$

$$\sin x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ... \qquad (2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... \qquad (3)$$

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ... \qquad (4)$$

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ... \qquad (5)$$

11.3.7. Биномиальный ряд

Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x) = (1+x)^m$, где $m-$произвольное постоянное число.

Для этой функции имеет место следующее разложение

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ... + \frac{m(m-1)(m-2)...[m-n+1]}{n!}x^n + ... \qquad (1)$$

Приложения степенных рядов к приближенным вычислениям. Введение

Разложения элементарных функций

$e^x, \sin x, \cos x, \arcsin x, arctgx, (1+x)^n, \ln(1+x)$ и так далее в ряд Маклерона дает возможность приближённое вычисления значений функций, вычисления корней и пределов а также определенные интегралы когда подынтегральная функция не имеет первообразная выраженных в элементарных функциях.

Рассмотрим конкретные примеры относительно только что сформулированных приближенных вычислениях.

11.4.1. Приближенное нахождение значений функций

Пример 1. Вычислить $\sin 1$ с точности до $0{,}0001$.

Решение. Воспользуемся разложением $\sin x$ в ряд Маклорона т.е $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

Здесь полагаем $x = 1$, и имеем $\sin 1 = 1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} - \frac{1^7}{7!} + \ldots$

Если отбросить все члены, начиная с 4-го, то погрешность будет по абсолютной величине меньше $\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}$ (ряд для $\sin 1$ есть ряд, удовлетворяющий признак Лейбница) Отсюда.

$$\sin 1 \approx \sin 57^\circ 17' \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 1\frac{1}{6} + \frac{1}{120} = 1 - 0{,}166666 + 0{,}008333 = 1 - 0{,}158336 = 0{,}84166$$

с точностью $0{,}0001$.

Пример 2. Пользуясь разложением $\cos x$ в ряд, вычислить $\cos 18^\circ$ с точностью до $0{,}0001$.

Решение. Так как

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Положим $x = 18^\circ = \frac{\pi}{10}$, тогда

$$x = \cos 18^\circ = \cos\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 - \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{10} = 0{,}31416\,,\ \left(\frac{\pi}{10}\right)^4 = 0{,}009974$$

Достаточно взять три члена ряда, так как $\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{10}\right)^6 < 0{,}0001$

Тогда

$$\cos 18^\circ \cong 1 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}09870 + \frac{1}{24}\cdot 0{,}00974 = 0{,}9511$$

Пример 3. Вычислить $\ln 1{,}04$ с точностью до 0,0001

Решение. Воспользуемся разложением $\ln(1+x)$ в ряд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

В этом равенстве положим $x = 0{,}04$ и имеем:

$$\ln(1{,}04) = 0{,}04 - \frac{(0{,}04)^2}{2} + \frac{(0{,}04)^3}{3} - \frac{(0{,}04)^4}{4} + \ldots = 0{,}04 - 0{,}0008 + 0{,}00000064 + \ldots$$

Откуда $\ln(1{,}04) \cong 0{,}0392$

Приближенное вычисление корней

Пример 4. Вычислить $\sqrt[5]{130}$ с точностью $0{,}001$

Решение. Воспользуемся биномиальным рядом

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

Поскольку $130 = 5^3 + 5$, тогда

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{5^3+5} = 5\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}} = 5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} = 5$$

$$(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}} = 5\left[1 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}04 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}(0{,}04)^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}^3 + (0{,}04)^3 + \ldots\right] =$$

$$= 5 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}2 - \frac{1}{9}\cdot\frac{0{,}0016}{2} + \frac{5}{81}\cdot\frac{0{,}000064}{2} + \ldots = 5 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}2 - \frac{1}{9}\cdot 0{,}008 + \frac{5}{81}\cdot 0{,}00032 - \ldots$$

четвертый член меньше $0{,}001$, и так

$$\sqrt[3]{130} \cong 5 + 0{,}0667 - 0{,}0009 = 5{,}066$$

11.4.2. Приближенное вычисление пределов и интегралов

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - arctgx}{x^3}$

Решение. Заменив $\sin x$ и $arctgx$ их разложениями в степенные ряды, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - arctgx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\right)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{3!}-\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^5}{5!}\right)+\ldots}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5!}\right)x^2+\ldots\right]=\frac{1}{6}$$

Пример 6. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ с точностью до 0,0001

Решение. Заменив в подинтегральном выражении $\cos x$ его разложением в степенной ряд, получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\ldots}{x^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots\right)dx=$$

$$\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4!}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1}{6!}\cdot\frac{x^5}{5}-\ldots\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}-\ldots\cong$$

$$\cong 0{,}25-0{,}0017=0{,}2483$$

11.4.3. Разложение в ряд Фурье. Непериодические функции.

Пусть $f(x)$ – непериодическая функция, заданная на всей числовой оси. Так как сумма тригонометрического ряда является периодической функцией, то очевидно, что данная непериодическая функция не может быть разложена в ряд Фурье.

Рассмотрим теперь эту функцию на интервале $(-l<x\le l)$ и попытаемся построить ряд Фурье, который имел бы ее своей суммой в этом интервале.

Для этого рассмотрим вспомогательную функцию $\overline{f(x)}-$ с периодом $T=2l$, значение которой на интервале $[-l,l]$ совпадают со значениями функции $f(x)$. Если для функции $\overline{f(x)}$ выполняются условия теоремы Дирехле, то ее можно представить соответствующим рядом Фурье. Этот ряд на интервале $(-l<x\le l)$ во всех точках непрерывности функции имеет своей суммой $f(x)=\overline{f(x)}$. В некоторых случаях приходиться иметь дело с функциями, заданными только в интервале $0<x\le l$.

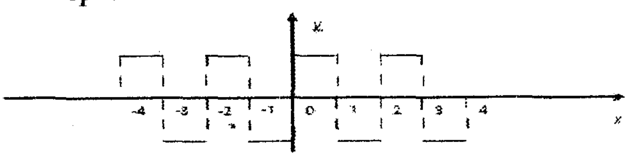
В этом случае мы можем сначало продолжить по какому-либо закону функцию на интервале $-l\le x\le 0$, а затем продолжить её на всю числовую прямую периодически с периодом $2l$.

Продолжить функцию из интервала $0\le x\le l$ на интервал $-l\le x\le 0$, можно произвольным образом.

В основном функцию продолжают четным или нечетным образом. Если функция продолжается четным образом, т.е $f(-x)=f(x)$, то ряд Фурье содержит только косинусы и свободный член. Если же функция продолжается нечетным образом, т.е $f(-x)=-f(x)$, то ряд Фурье содержит только синусы.

Таким образом, если функция задана в интервале $0\le x\le l$, то продолжая ее на интервал $-l\le x\le 0$, а затем продолжая полученную функцию периодически на всю числовую прямую, мы сможем получить бесчисленное множество рядов Фурье.

Пример 1. Разложить в ряд по синусу функцию $f(x)=1$, заданную в интервале $0<x\le 1$.



Решение. Для разложения функции в ряд по синусам, надо сначало продолжить на интервал $-1 < x \le 0$ нечетным образом, а затем полученную функцию продолжить периодически на всю числовую прямую.

Коэффициенты ряда вычисляются по формулам:

$$a_0 = a_n = 0 \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

Здесь $\quad 2l = 2 \Rightarrow l = 1 \quad f(x) = \begin{cases} -1, -1 < x < 0 \\ 1, 0 \le x \end{cases}$

Поскольку $f(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x -$ четное, то $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$

$$\frac{2}{1}\int_0^1 \sin n\pi x dx = -2\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 = -\frac{2}{n\pi}[\cos n\pi - 1] = -\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$$

Ряд Фурье для данной функции имеет вид:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)}{2n-1}x + \ldots\right]$$

11.4.4. Разложение в ряд Фурье функций с периодом 2l.

Часто приходится разлагать в тригонометрический ряд функции, период которых отличен от 2π.

Пусть функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям Дирехле, имеет период $T = 2l$, т.е. $f(x \pm 2l) = f(x)$

Введем новую независимую переменную $z = \frac{\pi}{l}x \;\Rightarrow\; x = \frac{l}{\pi}z$

и рассмотрим функцию $\varphi(z) = f(\frac{l}{\pi}z) = f(x)$.

Покажем, что есть функция с периодом 2π. Действительно,

$$\varphi(z + 2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(z + 2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}z + 2l\right) = f(x + 2l) = f(x) = \varphi(z).$$

Составим для функции $\varphi(z)$ ряд Фурье.

$\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_k\cos kz+b_k\sin kz\right)$, где коэффициент a_0, a_k, b_k находится по формулам Фурье. В этом случае

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(z)dz=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\frac{l}{\pi}z)dz.$$

Учитывая подстановку $z=\frac{\pi}{l}x$ и $dz=\frac{\pi}{l}xdx$ получим

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\frac{l}{\pi}z)dz=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx.$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\varphi(z)\cos kzdz=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}z\right)\cos kzdz==\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi k}{l}x\cdot\frac{\pi}{l}dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi k}{l}xdx$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\varphi(z)\sin kzdz=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}z\right)\sin kzdz==\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi k}{l}x\cdot\frac{\pi}{l}dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi k}{l}xdx$$

Таким образом, для функции $f(x)$, имеющий период $2l$, коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;\\ a_k&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\cos\frac{k\pi}{l}xdx;\\ b_k&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}xdx;\end{aligned}\right\}\qquad(1^*)$$

В этом случае ряд Фуръе имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right)\qquad(2^*)$$

Если $f(x)$ четный функции, то

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx; \\ a_k &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\cos\frac{k\pi}{l}xdx; \\ b_k &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}xdx = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3^*)$$

а ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x + b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right) \qquad (4^*)$$

Если $f(x)$ нечетной функции, то коэффициенты Фурье будут равны

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= a_k = 0, \\ b_k &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx \end{aligned}\right\} \qquad (5^*)$$

а ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_n\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x \qquad (6^*)$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $2l = 2$, заданную на интервале $-1 \le x \le 1$ формулой $f(x) = x - 1$

Решение. Коэфицциенты Фурье находим по формулам (1^*), пологая $l = 1$.

Учытивая подстановку $z = \frac{\pi}{l}xdz = \frac{\pi}{l}dx$ получим

$$a_0 = \int_{-1}^{1}(x-1)dx = \frac{(x-1)^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = -2$$

$$a_k = \int_{-1}^{1}(x-1)\cos kxdx = \int_{-1}^{1}x\cos kxdx = 0$$

Так как $f(x) = x\cos kx$ нечетная функция.

$$b_k=\int_{-1}^{1}(x-1)\sin kx dx=-\frac{x\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{\cos k\pi x}{k\pi}dx+\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_{-1}^{1}=-\frac{1}{k\pi}[\cos k\pi+\cos(-k\pi)]+$$

$$+\frac{1}{k\pi}[\cos k\pi-\cos(-k\pi)]=-\frac{2}{k\pi}\cos(-k\pi)=-\frac{2}{k\pi}(-1)^k$$

Итак, $a_0=a_k=0,\quad b_k=-\frac{2}{k\pi}(-1)^k\quad b_1=\frac{2}{\pi},b_2=\frac{2}{2\pi},b_3=\frac{2}{3\pi},...$

Тогда ряд Фурье для функции

$$f(x)=x-1=-1+\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+...+(-1)^n\frac{\sin nx}{n}+...\right]$$

В частности, $x=0$, то $f(0)=-1$

Тригонометрические ряды. Ряды Фурье.

11.5.1. Периодические процессы и периодические функции

Весьма многие процессы, происходящие в природе и механике, обладают свойством повторяться через определённые промежутки времени. Такие процессы называются периодическими.

Примерами периодических процессов могут служить движения шатуна и поршня в двигателях автомобиля, явления, связанные с распространением электромагнитных колебаний, и многие другие

Изучение периодических процессов математически описывается периодическими функциями.

Нам известно, что функция $f(x)$ называется периодической, если для любого $T\neq 0$, выполняется соотношение $f(x\neq T)=f(x)$, где $T-$ период.

Простейшими периодическими функциями являются тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$. Период этих функций равен $T=2\pi$:

$$\sin(x\pm 2\pi)=\sin x,\ \cos(x\pm 2\pi)=\cos x.$$

Функции $\sin kx$ и $\cos kx$ также являются периодическими с периодом 2π.

Любая линейная комбинация простейших функций, т.е. любая функция вида

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots$$

также является периодической с периодом 2π.

Простейший периодический процесс – гармоническое колебание – описывается периодическими функциями $\sin kx$ и $\cos kx$. Более сложные периодические процессы, описываются функциями, составленными либо из конечного, либо из бесконечного числа слагаемых вида $\sin kx$ и $\cos kx$.

Ортогональность системы простейших функций

Определение 1. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определенные на отрезке $[a,b]$, называются ортогональными друг другу на это отрезке, если

$$\int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x) dx = 0$$

Приведем несколько формул, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Каковы бы ни были целые числа m и n, имеют место следующие равенства:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = \begin{cases} 0, если & m \neq n. \\ \pi, если & m = n. \end{cases} \tag{1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin x dx = \begin{cases} 0, если & m \neq n. \\ \pi, если & m = n. \end{cases} \tag{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = 0, \tag{3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx = 0, \tag{4}$$

Докажем, например, равенство (1). Воспользуемся известной формулой

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]$$

Пусть сначала $m \neq n$. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0$$

так как $\sin(m\pm n)x=0$

Если $m=n$, то $\cos mx\cdot\cos nx=\cos^2 mx=\frac{1}{2}[1+\cos 2x]$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}[1+\cos 2mx]dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2m}\sin 2mx\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

Аналогично можно показать справедливость и равенства (2), (3) и (4).

Тригонометрические ряды

Определения 2. Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (5)$$

называется тригонометрическим рядом, а постоянные числа $a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,\dots,a_n,b_n,\dots$ называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Так как члены тригонометрического ряда (5) имеют общий период $T=2\pi$, то и сумма $S(x)$ ряда, если он сходится, также является периодической функцией с периодом 2π.

Теперь займемся к вопросу о разложении заданной функции $f(x)$ в ряд (5).

Предположим, что $f(x)-$периодическая функция с периодом 2π, и что для всех x справедливо разложение

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (6)$$

В таком случае говорят, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд. Предполагая, что этот ряд правильно сходящийся на сегменте $[-\pi,\pi]$ нужно найти его коэффициенты. Относительно коэффициентов ряда (6) имеет место следующая теорема.

Теорема. Если для всех x имеет место равенство (6), причем ряд в правой части этого равенства сходится правильно на всей числовой прямой, то справедливы формулы

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \tag{7}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos xdx, \quad n = 1,2,3,... \tag{8}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin xdx, \quad n = 1,2,3,... \tag{9}$$

Доказательство. Как известно, что правильно сходящийся функциональный ряд можно интегрировать почленно на сегменте $[-\pi, \pi]$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right).$$

Но так как согласно формуле (4)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx = 0, \text{ то}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx = a_0\pi.$$

Отсюда $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

что совпадает с формулой (7).

Теперь докажем формулу (8). Для нахождения коэффициента a_n умножим ряд (6) почленно на $\cos kx$, где k – целое положительное число, т.е.

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx\cos kx + b_n\sin nx\cos kx\right)$$

Ряд правой части этого равенства является правильно сходящийся на отрезке $[-\pi, \pi]$, следовательно возможно почленное интегрирование этого ряда:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kxdx\right) \quad (10)$$

Здесь $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx = 0$ на основании формулы (4), а вследствие равенства (1) и (3) под знаком суммы отличен от нуля только один интеграл при $n=k$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx = \pi.$$

Поэтому равенство (10) имеет вид $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = a_k\pi$,

откуда $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx$

Итак, доказана формула (8).

Чтобы доказать формулу (9) умножаем обе части равенства (6) на $\sin kx$ и интегрируя в пределах от $-\pi$ до π, на основании (2), (3) и (4) найдем выражения для коэффициентов b_k:

Таким образом, коэффициенты ряда (6) определяемые по формулам (7), (8) и (9), называются коэффициентами Фурье, а ряд (5) называется рядом Фурье

Сходимость ряда Фуръе

При выводе формул (7), (8) и (9) мы заранее предполагаем, что функция $f(x)$ разлагается в правильно сходящийся тригонометрический ряд (5).

Естественно возникает вопрос ряд Фурье сходящийся и если он сходится, то имеем-ли мы утверждать, что он сходится именно к функции $f(x)$, с помощью которой вычислялись коэффициенты ряда?

Оказывается, что сходимость ряда Фурье к заданной функции имеет место для довольно широкого класса функций. Достаточные условия сходимости ряда Фурье, и, следовательно, возможность разложения функций в ряд Фурье даются теоремой Дирехле (1805-1959) – немецкий математик.

Прежде чем формулировать эту теорему введем два определения.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной на сегменте $[a,b]$, если этот сегмент можно разделить на конечное число сегментов, внутри каждого из которых функция либо возрастает, либо только убывает, либо постоянно.

Определение 4. Функция $f(x)$ называется удовлетворяющей условиям Дирехле на сегменте $[a,b]$, если:

1) Функция непрерывна на сегменте $[a,b]$ или же имеет на нем конечное число точек разрыва 1-го рода;

2) Функция кусочно-монотонна на сегменте $[a,b]$.

Теорема. (Дирехле) Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π удовлетворяет на любом сегменте условиями Дирехле. В таком случае ряд Фурье, соответствующий этой функции, сходится во всех точках числовой оси. При этом в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ сумма ряда $S(x)$ равна значению функции в этой точке. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна среднему арифмеическому предельных значений функции при $x \to x_0$ слева и справа т.е.

$$S(x_0) = \left[\lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)\right] \cdot \frac{1}{2}$$

Доказательство этой теоремы мы проводить не будем.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную на интервале $-\pi \le x \le \pi$ формулой $f(x) = x$.

Решение. Эта функция удовлетворяет условиям Дирехле и, следовательно может быь разложена в ряд Фурье. Применяя формулы (7), (8), и (9), найдём коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\pi^2 - \pi^2\right] = 0;$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos xkdx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx=\frac{1}{\pi k^2}\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi k^2}[\cos\pi k-\cos\pi k]=0;$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx\right]=\frac{1}{\pi k}[-\pi\cos\pi k-\pi\cos\pi k]+\frac{1}{k^2\pi}\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{-2}{k}\cos k\pi=\frac{-2}{k}(-1)^k=\frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

Таким образом $a_0=a_1=a_2=\ldots=a_n=\ldots=0$

$$b_1=\frac{2}{1},b_2=-\frac{2}{2},b_3=\frac{2}{3},b_4=-\frac{2}{4},\ldots$$

Следовательно, ряд Фурье функции $f(x)=x,\quad -\pi\le x\le\pi$ имеет вид

$$f(x)=x=2\left[\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin nx+\ldots\right]$$

Если положим $x=\frac{\pi}{2}$, то

$$f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}=2\left[\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\sin\pi}{2}+\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3}-\frac{\sin 2\pi}{4}+\frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{5}-\ldots\right]$$

или

$$\frac{\pi}{2}=2\left[1-0-\frac{1}{3}-0+\frac{1}{5}-\ldots\right]$$

Отсюда находим

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$$

Ряды Фурье для четных и нечетных функций

11.5.2. Основные свойства четных нечетных функций

1° Произведение четной функции на четную или нечетной на нечетную есть функция четная.

Пусть, например, $f(x)$ и $g(x)-$ четные функции. Докажем, что функция $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ также четная, так как $f(x)\cdot g(x)$ и

$g(-x)=g(x)$, тогда $h(x)=f(x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=h(x)$, т.е. $h(x)-$ функция четная.

Вторая часть утверждения 1°, аналогично доказывается.

2° . Произведение четной функции на нечетную есть функция нечетная.

Пусть $f(x)-$ четная, а $g(x)-$ нечетная, тогда $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$, и $f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot(-g(x))=-f(x)g(x)$

3° . Если $f(x)-$ четная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx \tag{1}$$

4°. Если $f(x)-$ нечетная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0 \tag{2}$$

11.5.3 Разложение в ряд Фурье четную функцию

Пусть $f(x)-$четная.

Так как $\cos kx-$ функция четная, а $\sin kx-$ функция нечетная, то произведение $f(x)\cos kx-$является функцией четной, а $f(x)\sin kx-$ функцией нечетной (свойства 1° и 2°).

На основании свойств 3° и 4° получим

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx \\ a_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kxdx \\ b_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx=0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Согласно этому ряд Фурье для четной функции имеет вид

$$f(x)==\frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx \tag{4}$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|$, $-\pi<x<\pi$

Решение. Функция $f(x)$−четная, поэтому коэффициенты ряда определяются по формулам (3):

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\pi$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kxdx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kxdx\right]=\frac{2}{\pi k^2}\cos kx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi k^2}[(-1)^n-1]$$

Таким образом,

$$a_0=\pi, a_1=-\frac{4}{\pi}, a_2=-\frac{4}{4\pi}[(-1)^2-1]=0, a_3=-\frac{4}{9\pi}, a_4=0,...$$

Ряд Фурье соответствующий функции $f(x)$ имеет вид

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1!}+\frac{\cos 3x}{3!}+\frac{\cos 5x}{5!}+...+\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)!}+...\right]$$

Если $x=\pm\frac{\pi}{2}$, то $\left|\pm\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}$

15.5.4. Разложение в ряд Фурье нечетной функции

Пусть $f(x)$ нечетную функцию, ее надо разложить в ряд Фурье.

Согласно свойств 1° и 2° произведение $f(x)\cos kx$ является функцией нечетной, а $f(x)\sin kx-$ функцией четной. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0\\ a_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx=0\\ b_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kxdx\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Ряд Фурье для нечетной функции имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin kxdx \tag{6}$$

Таким образом, четная функция разлагается в ряд только по косинусам, а нечетная функция- только по синусам кратных дуг.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|$, $-\pi<x<\pi$

Решение. Согласно формулам (5) имеем

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kxdx = 0 \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kxdx = \begin{bmatrix} u=x, du=dx \\ dv=\sin kxdx \\ v=-\dfrac{1}{k}\cos kx \end{bmatrix} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{k}\cos kx\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{k}\cos k\pi - \frac{\pi}{k}\cos k\pi\right] = -\frac{2}{k}\cos k\pi = -\frac{2}{k}(-1)^{k+1}
\end{aligned}\right\}$$

Итак, для функции $f(x)=|x|$, $-\pi<x<\pi$ ряд Фуръе имеет

$$f(x)=x=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kxdx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin kx =$$

вид $$=2\left[\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+....+(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\sin kx+...\right]$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие числового ряда и его суммы.
2. Необходимый признак сходимости числового ряда.

3. Достаточные признаки сходимости числовых рядов (признак сравнения, признак Д'Аламбера, радикальный и интегральный признаки Коши).

4. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=5$, то этот ряд

а) сходится; б) условно расходится;
в) расходится; г) условно сходится

5. Если радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ равен $R=1$, то интервалом сходимости этого ряда является интервал

а) $(-1;1)$; б) $(-1;0)$; в) $(0;1)$; г) $(-n;n)$

6. Если радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+2)^n$ равен $R=4$, то интервалом сходимости этого ряда является интервал

а) $(-4;4)$; б) $(-6;4)$; в) $(-4;2)$; г) $(--6;2)$.

7. Какой ряд сходится по признаку Лейбница?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)^5$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{5}{3}\right)^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{5}{3}\right)^{2n}$.

8. Вычислить $\sqrt{17}$ с точностью до 10^{-4}:

а) 4, 1230; б) 0,1230; в) 1,987; г) 6.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 13.23. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{4n+2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{(n+1)7^n}$,

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3n+10}$, д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+10n+29}$.

Ответы:

а) расходится; б) сходится; в) сходится; г) расходится;
д) сходится

Задача 13.24. Установить абсолютную или условную сходимост рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{n}}$.;

Ответ. а) сходится абсолютно , б) сходится условно.

Задача 13.25. Найти область сходимости степенного ряда.

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+10}$, б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n 4^n}{n}$.

Ответ: а) $[-1;1)$; б) $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука. 1985. Т.1.

2. Пискунов Н.С. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука. 1985. Т.2.

3. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Мн.: Высш. шк. 1985-1987, ч.2, ч.3.

4. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и её приложения в экономическом образовании. М.: «Дело», 2001.

5. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Индивидуальные домашние задания по высшей математике. Мн.: Высш. шк. 2000, ч.1 и ч.2.

6. Гусак А.Н. Высшая математика. Мн.: Тетра Системс 2000, ч.1 и ч.2.

7. Малыхин В.И. Математика в экономике. М.: ИНФРА-М, 2001.

Дополнительная литература

8. Высшая математика. Общий курс. Под общей редакцией С.А. Самаля. М.: Высшая школа, - 2000.

9. Лихолетов И.И., Мицкевич И.П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Мн.: Вышэйшая школа, - 1976.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Для заметка

ВАХОБОВ ВАЛИЖОН
ЛАКАЕВ ШУХРАТ САИДАХМАДОВИЧ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Редактор:
А.Абдужалилов

Техник редактор:
Ю.Ўринов

Корректор:
Д.Бекназарова

Лицензия редакции. № 2013-975f-3e5e-d1e5-f4f3-8537-2366, 20.08.2020г.
Сдано в печать 23.11.2020 года. Формат: 60x84 $^{1}/_{16}$
Офсетная печать. Гарнитура “Times New Roman”.
Усл. П.л. 14.5. Тираж 200 шт. Заказ № 23.

Редакция «Tafakkur avlodi», 100190, город Ташкент, Юнусабад-9, 13-54. E-mail: tafakkur_avlodi@mail.ru

Отпечатано в типографии ООО «Tafakkur avlodi», г.Ташкент, Алмазарская р-н., улица Нодира, 1.
Телефон: +99890 000-33-93

«Tafakkur avlodi»
nashriyoti

ISBN 978-9943-6690-9-3
9 789943 669093